

3.1. Биномно разпределение. Примери на реални ситуации

1) Схема на Бернули – преговор

3. Провеждат се 4 опита с два изхода, като всеки от изходите настъпва с постоянна вероятност – извадената чаша е дефектна с вероятност 0,01 и извадената чаша е недефектна с вероятност $1 - 0,01 = 0,99$.

а) 2 дефектни чаши

Изходът успех в този случай е – чашата е дефектна.

⇒ имаме схема на Бернули (4, 0,01).

Вероятността да се извадят 2 дефектни чаши е $P_4(2) = C_4^2 0,01^2 \cdot 0,99^2 = 6 \cdot 0,0099^2$.

б) 3 недефектни чаши

Изходът успех в този случай е – чашата е недефектна.

⇒ имаме схема на Бернули (4, 0,99).

Вероятността да се извадят 3 недефектни чаши е

$$P_4(3) = C_4^3 0,99^3 \cdot 0,01 = 4 \cdot 0,99^4 \cdot 0,01 = 0,04 \cdot 0,99^3.$$

в) 4 недефектни чаши

Изходът успех в този случай е – чашата е недефектна.

⇒ имаме схема на Бернули (4, 0,99).

Вероятността да се извадят 4 недефектни чаши е

$$P_4(4) = C_4^4 0,99^4 \cdot 0,01^0 = 1 \cdot 0,99^4 = 0,99^4.$$

2) Биномно разпределение

5. $X \in Bi(4, \frac{1}{5})$

$$P_4(0) = C_4^0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{256}{625}$$

$$P_4(1) = C_4^1 \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{256}{625}$$

$$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{96}{625}$$

$$P_4(3) = C_4^3 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{16}{625}$$

$$P_4(4) = C_4^4 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^0 = \frac{1}{625}$$

6. $Bi(4, \frac{1}{2})$

$$P_4(0) = C_4^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$P_4(1) = C_4^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{4}{16}$$

$$P_4(2) = C_4^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16}$$

$$P_4(3) = C_4^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{4}{16}$$

$$P_4(4) = C_4^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{16}$$

3.2. Свойства на биномното разпределение

1) Математическо очакване и дисперсия

2. а) $X \in Bi(200; 0,01)$

$$EX = np = 200 \cdot 0,01 = 2$$

$$DX = npq = 200 \cdot 0,01 \cdot 0,99 = 1,98$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0,01 \cdot 0,99} = \frac{3\sqrt{22}}{10} \approx 1,4$$

б) $X \in Bi(5, \frac{2}{3})$

$$EX = np = 5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \approx 3,33$$

$$DX = npq = 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{9} \approx 1,11$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \frac{\sqrt{10}}{3} \approx 1,05$$

в) $X \in Bi(4, \frac{4}{7})$

$$EX = np = \frac{16}{7} \approx 2,29$$

$$DX = npq = 4 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{48}{49} \approx 0,98$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{48}}{7} = \frac{4\sqrt{3}}{7} \approx 0,99$$

г) $X \in Bi(500; 0,02)$.

$$EX = np = 500 \cdot 0,02 = 10$$

$$DX = npq = 500 \cdot 0,02 \cdot 0,98 = 9,8$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{9,8} \approx 3,13$$

2) Най-вероятна стойност на биомно разпределение

4. Имаме $Bi(16, \frac{1}{5})$

Най-вероятният брой грешки е $m = [(n+1)p] = \left[17 \cdot \frac{1}{5} \right] = [3,4] = 3$.

Най-вероятната стойност на биомното разпределение е $P_{16}(3) = C_{16}^3 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^{13}$.

5. Имаме $Bi(120; 0,03)$

Най-вероятният брой на уредите с транспортен дефект е

$$m = [(n+1)p] = [121 \cdot 0,03] = [3,63] = 3.$$

6. Имаме $Bi(20; 0,02)$

Най-вероятният брой прекъсвания на уреда е

$$m = [(n+1)p] = [21 \cdot 0,02] = [0,42] = 0.$$

8. Имаме $Bi(n; 0,05)$.

Най-вероятният брой грешно преброени класове е 10, т.е. $m = 10$.

Тъй като $m = [(n+1)p]$, то $(n+1)p - 1 \leq m \leq (n+1)p$ или при $m = 10$, $p = 0,05$ имаме $(n+1)0,05 - 1 \leq 10 \leq (n+1)0,05$

$$\text{Така получаваме системата } \begin{cases} (n+1)0,05 - 1 \leq 10 \\ 10 \leq (n+1)0,05 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (n+1) \leq \frac{11}{0,05} \\ (n+1) \geq \frac{10}{0,05} \end{cases} \Leftrightarrow 199 \leq n \leq 219.$$