2. Числови редици – решения на задачите

2.1. Метод на математическата индукция

3. а) 1) При $n=1$ равенството е $1=\dfrac{1.2}{2}$, което е вярно.

2) Допускаме, че равенството е вярно за n, т.е. вярно е $1+2+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

3) Ще докажем равенството за $n+1$, т.е. ще докажем, че $1+2+...+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Наистина, $1+2+...+n+(n+1)=\dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1)$ (използвали сме индукционното предположение)

Преобразуваме израза $\dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. Получихме, че равенството е вярно за $n+1$.

4) От Аксиомата за математическата индукция следва, че равенството е вярно за всяко естествено число n.

б) При $n=1$ имаме $1^3=\dfrac{1^2.2^2}{4}$, което е вярно.

Нека е вярно равенството $1^3+2^3+...+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Ще докаже, че е вярно $1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=\dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.

Наистина,

$$1^3+2^3+...+n^3+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3=\frac{n^2(n+1)^2+4(n+1)^3}{4}=$$

$$=\frac{(n+1)^2(n^2+4n+4)}{4}=\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

Следователно равенството е вярно за всяко $n\in\mathbb{N}$.

в) При $n=1$ имаме $1=\dfrac{1.2.3.5}{30}$, което е вярно.

Нека е вярно $1^4+2^4+...+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Ще докажем, че $1^4+2^4+...+n^4+(n+1)^4=\dfrac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)(3(n+1)^2+3(n+1)-1)}{30}=$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)(3n^2+6n+3+3n+3-1)}{30}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)(3n^2+9n+5)}{30}.$$

Наистина, $1^4+2^4+...+n^4+(n+1)^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}+(n+1)^4=$

$$= \frac{(n+1)\,(n(2n+1)(3n^2+3n-1)+30(n+1)^3)}{30} = \frac{(n+1)(6n^4+39n^3+91n^2+89n+30)}{30} \quad (1)$$

Като използваме схемата на Хорнер разлагаме израза във втората скоба:

$$6n^4+39n^3+91n^2+89n+30 = (n+2)(n+\frac{3}{2})(6n^2+18n+10) = (n+2)(2n+3)(3n^2+9n+5) \quad (2)$$

От (1) и (2) получаваме, че равенството е изпълнено за $n+1$ $\Rightarrow$ е изпълнено за всяко естествено число n.

4. При $n=3$ равенството $2^3>7$ е вярно.

Нека е вярно равенството $2^n>2n+1$.

Ще докажем, че е вярно $2^{(n+1)}>2n+3$.

Имаме $2^{n+1}=2^n.2>(2n+1).2=4n+2=2n+2n+2>2n+6+2>2n+3$.

Използвали сме, че $n>3 \Rightarrow 2n>6$.

Получихме, че неравенството е вярно за $n+1$, следователно е вярно за всяко n естествено число.

5. Ще проверим неравенството за първите няколко естествени числа:

При $n=1$ неравенството е $1!>2$, което не е вярно.

При $n=2$ неравенството е $2!>2^2$, което не е вярно.

При $n=3$ неравенството е $3!>2^3$, което не е вярно.

При $n=4$ неравенството е $4!>2^4$, което е вярно.

Нека неравенството $n!>2^n$ е вярно за някое $n>4$. Ще докажем, че то е вярно и за $n+1$. т.е. ще докажем, че $(n+1)!>2^{n+1}$.

Наистина: $(n+1)!=n!(n+1)>2^n(n+1)>2^n.2=2^{n+1}$.

Следователно неравенството $n!>2^n$ е изпълнено за $n\geq 4$.

2.3. Числови редици

4. а) Редицата е $a_n = \begin{cases} 1, & \text{при } n \text{ нечетно} \\ 0, & \text{при } n \text{ четно} \end{cases}$.

Редицата не е монотонна и е ограничена.

б) Образуваме разликата

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n^2+4n+4-n^2-4n-3}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{(n+2)(n+3)} > 0$$

$\Rightarrow a_{n+1} > a_n \Rightarrow$ редицата е растяща.

Ще докаже,. че редицата е ограничена отгоре от 1.

Образуваме разликата $a_n - 1 = \frac{n+1}{n+2} - 1 = \frac{n+1-n-2}{n+2} = \frac{-1}{n+2} < 0 \Rightarrow a_n < 1 \Rightarrow$ редицата е ограничена отгоре.

Отдолу редицата е ограничена от първия си член, защото е растяща.

в) Образуваме разликата $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+2} + 1 - \frac{1}{n+1} - 1 = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$.

$\Rightarrow a_{n+1} < a_n \Rightarrow$ редицата е намаляваща.

Имаме $a_n = \frac{1}{n+1} + 1 > 0$, следователно редицата е ограничена отдолу.

Отгоре редицата е ограничена от първия си член, защото е намаляваща.

г) Образуваме разликата

$a_{n+1} - a_n = \frac{n+2}{(n+1)^2} - \frac{n+1}{n^2} = \frac{-n^2-3n-1}{n^2(n+1)^2} < 0$, следователно редицата е намаляваща.

Имаме $a_n = \frac{n+1}{n^2} > 0$, следователно редицата е ограничена отдолу.

Отгоре редицата е ограничена от първия си член, защото е намаляваща.

5. б) Имаме $a_{n+1} = \frac{a_n}{2}$.

Тъй като $a_n > 0$ за всяко n, то образуваме частното $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n}{2a_n} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow a_{n+1} < a_n \Rightarrow$ редицата е намаляваща.

в) Имаме $a_{n+1} = 2a_n$.

Образуваме частното $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2a_n}{a_n} = 2 > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$, защото $a_n > 0 \Rightarrow$ редицата е растяща.

г) Образуваме разликата $a_{n+1} - a_n = a_n - (n+1) - a_n = -(n+1) < 0 \Rightarrow$ редицата е намаляваща.

2.4. Теореми за граници на редици

2. а) $\lim\limits_{a_n\to 2}\dfrac{3a_n+1}{5-a_n}=\dfrac{3.2+1}{5-2}=\dfrac{7}{3}$.

б) $\lim\limits_{a_n\to 3}\dfrac{a_n{}^2+2}{a_n+1}=\dfrac{9+2}{3+1}=\dfrac{11}{4}$.

в) $\lim\limits_{a_n\to 5}(\sqrt{a_n-1}+2a_n)=\sqrt{5-1}+2.5=12$.

г) $\lim\limits_{a_n\to 1}(\sqrt{a_n+1}-\sqrt{a_n})=\sqrt{2}-1$.

3. а) $\lim\limits_{a_n\to -1}\dfrac{a_n{}^2+4a_n+3}{a_n{}^2-a_n-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{a_n\to -1}\dfrac{(a_n+1)(a_n+3)}{(a_n+1)(a_n-2)}=\lim\limits_{a_n\to -1}\dfrac{a_n+3}{a_n-2}=-\dfrac{2}{3}$.

б) $\lim\limits_{a_n\to 4}\dfrac{a_n{}^2-16}{a_n{}^2-2a_n-8}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{a_n\to 4}\dfrac{(a_n-4)(a_n+4)}{(a_n-4)(a_n+2)}=\lim\limits_{a_n\to 4}\dfrac{(a_n+4)}{(a_n+2)}=\dfrac{4}{3}$.

в) $\lim\limits_{a_n\to 2}\dfrac{a_n{}^3-8}{2a_n{}^2-5a_n+2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{a_n\to 2}\dfrac{(a_n-2)(a_n{}^2+2a_n+4)}{2(a_n-2)(a_n-\frac{1}{2})}=\lim\limits_{a_n\to 2}\dfrac{(a_n{}^2+2a_n+4)}{2(a_n-\frac{1}{2})}=4$.

г) $\lim\limits_{a_n\to\sqrt{3}}\dfrac{(a_n-\sqrt{3})(a_n-\sqrt{2})}{a_n{}^2-3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{a_n\to\sqrt{3}}\dfrac{(a_n-\sqrt{3})(a_n-\sqrt{2})}{(a_n-\sqrt{3})(a_n+\sqrt{3})}=\lim\limits_{a_n\to\sqrt{3}}\dfrac{(a_n-\sqrt{2})}{(a_n+\sqrt{3})}=\dfrac{3-\sqrt{6}}{6}$.

4. Във всички примери първо рационализираме числителя, знаменателя или и двете,

а) $\lim\limits_{a_n\to 0}\dfrac{\sqrt{a_n+2}-\sqrt{2}}{a_n}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{a_n\to 0}\dfrac{a_n+2-2}{a_n(\sqrt{a_n+2}+\sqrt{2})}=\lim\limits_{a_n\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{a_n+2}+\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

б) $\lim\limits_{a_n\to 2}\dfrac{\sqrt{3a_n+2}-\sqrt{a_n+6}}{\sqrt{a_n+2}-\sqrt{2a_n}}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{a_n\to 2}\dfrac{(3a_n+2-(a_n+6))(\sqrt{a_n+2}+\sqrt{2a_n})}{(a_n+2-2a_n)(\sqrt{3a_n+2}+\sqrt{a_n+6})}=$

$\lim\limits_{a_n\to 2}\dfrac{2(a_n-2)(\sqrt{a_n+2}+\sqrt{2a_n})}{-(a_n-2)(\sqrt{3a_n+2}+\sqrt{a_n+6})}=\lim\limits_{a_n\to 2}\dfrac{2(\sqrt{a_n+2}+\sqrt{2a_n})}{-(\sqrt{3a_n+2}+\sqrt{a_n+6})}=-\sqrt{2}$

в) $\lim\limits_{a_n\to 3}\dfrac{\sqrt{a_n{}^2+3}-2\sqrt{a_n}}{a_n-3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{a_n\to 3}\dfrac{a_n{}^2+3-4a_n}{(a_n-3)(\sqrt{a_n{}^2+3}+2\sqrt{a_n})}=$

$\lim\limits_{a_n\to 3}\dfrac{(a_n-3)(a_n-1)}{(a_n-3)(\sqrt{a_n{}^2+3}+2\sqrt{a_n})}=\lim\limits_{a_n\to 3}\dfrac{a_n-1}{\sqrt{a_n{}^2+3}+2\sqrt{a_n}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

5. а) Нека $\varepsilon > 0$ е произволно положително число. Трябва да намерим число N, такова че при всяко $n > N$ да е изпълнено $\left|\dfrac{2n}{n-2} - 2\right| < \varepsilon$.

Преобразуваме последното неравенство $\left|\dfrac{2n-2n+4}{n-2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{4}{n-2}\right| < \varepsilon$ (1)

Нека $n > 2$. Тогава $n-2 > 0$, $\left|\dfrac{4}{n-2}\right| = \dfrac{4}{n-2}$ и (1) приема вида $\dfrac{4}{n-2} < \varepsilon$, откъдето $n > \dfrac{4}{\varepsilon} + 2$ (защото $n-2 > 0$).

Да изберем $N = \dfrac{4}{\varepsilon} + 2$.

Нека $n > N = \dfrac{4}{\varepsilon} + 2 \Leftrightarrow \dfrac{n-2}{4} > \dfrac{1}{\varepsilon}$. (2)

Тъй като $n > \dfrac{4}{\varepsilon} + 2 > 2$, то $n-2 > 0$ и (2) приема вида $\dfrac{4}{n-2} < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{4}{n-2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow$ $\left|\dfrac{2n-2n+4}{n-2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\dfrac{2n}{n-2} - 2\right| < \varepsilon$.

Да обобщим получения резултат:

Нека $\varepsilon > 0$ е произволно число. Избираме $N = \dfrac{4}{\varepsilon} + 2$. Тогава за всяко $n > N$ е изпълнено $\left|\dfrac{2n}{n-2} - 2\right| < \varepsilon$.

От определението за граница на редица получаваме, че $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n-2} = 2$.

б) Нека $\varepsilon > 0$ е произволно число.

Разглеждаме неравенството $\left|\dfrac{2n+1}{3n} - \dfrac{2}{3}\right| < \varepsilon$, $\left|\dfrac{6n+3-6n}{9n}\right| < \varepsilon$, $\left|\dfrac{3}{9n}\right| < \varepsilon$.

Тъй като $n > 0$, то $\left|\dfrac{3}{9n}\right| = \dfrac{3}{9n}$. Получихме, че $\dfrac{3}{9n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \dfrac{3}{9\varepsilon}$ (защото $n > 0$).

Нека $N = \dfrac{3}{9\varepsilon}$. Тогава за всяко $n > N = \dfrac{3}{9\varepsilon}$ е изпълнено $\left|\dfrac{2n+1}{3n} - \dfrac{2}{3}\right| < \varepsilon$.

От определението за граница на редица получаваме, че $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{3n} = \dfrac{2}{3}$.

в) Нека $\varepsilon > 0$ е произволно число.

Разглеждаме неравенството $\left|\dfrac{n+5}{5n-50}-\dfrac{1}{5}\right| < \varepsilon$, $\left|\dfrac{15}{5n-50}\right| < \varepsilon$. (1)

Нека $n > 10 \Rightarrow 5n-50 > 0$, $n > 10$, тогава $\left|\dfrac{15}{5n-50}\right| = \dfrac{15}{5n-50}$ и (1) приема вида $\dfrac{15}{5n-50} < \varepsilon$, $n > \dfrac{15}{5\varepsilon}+10$.

Нека $N = \dfrac{15}{5\varepsilon}+10$. Тогава за всяко $n > N = \dfrac{15}{5\varepsilon}+10$ е изпълнено $\left|\dfrac{n+5}{5n-50}-\dfrac{1}{5}\right| < \varepsilon$ (тук сме използвали, че щом $n > N = \dfrac{15}{5\varepsilon}+10 > 10$, то $n > 10$).

От определението за граница на редица получаваме, че $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+5}{5n-50} = \dfrac{1}{5}$.

6. а) Образуваме разликата $a_{n+1}-a_n = \dfrac{(n+2)(n+4)}{(n+1)^2} - \dfrac{(n+1)(n+3)}{n^2} = \dfrac{-4n^2-10n-3}{n^2(n+1)^2} < 0$.

Редицата е намаляваща и тъй като $a_n > 0$, тя е ограничена отдолу и според теоремата на Вайерщрас, редицата е сходяща.

б) Образуваме разликата $a_{n+1}-a_n = \dfrac{n+3}{n} - \dfrac{n+2}{n-1} = \dfrac{-1}{n(n-1)} < 0 \Rightarrow$ редицата е намаляваща.

При $n > 1$ имаме $a_n = \dfrac{n+2}{n-1} > 0$, следователно редицата е ограничена отдолу, следователно е сходяща, според теоремата на Вайерщрас.

в) Образуваме разликата $a_{n+1}-a_n = 1-\dfrac{1}{n+2} - \left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$.

Получихме, че редицата е растяща. Ще докажем, че тя е ограничена отгоре от 1.

Наистина: $a_n - 1 = 1 - \dfrac{1}{n+1} - 1 = -\dfrac{1}{n+1} < 0 \Rightarrow a_n < 1$ за всяко n.

И така, редицата е растяща и ограничена отгоре, следователно е сходяща, според теоремата на Вайерщрас.

г) Образуваме разликата $a_{n+1}-a_n = \dfrac{n-1}{n+3} - \dfrac{n-2}{n+2} = \dfrac{4}{(n+2)(n+3)} > 0 \Rightarrow$ редицата е растяща.

Ще докажем, че $\{a_n\}$ е ограничена отгоре от 1.

Образуваме разликата $a_n - 1 = \dfrac{n-2}{n+2} - 1 = \dfrac{-4}{n+2} < 0 \Rightarrow a_n < 1$ за всяко n.

Следователно $\{a_n\}$ е растяща и ограничена отгоре, следователно е сходяща, според теоремата на Вайерщрас.

7. а) Ще докажем по индукция, че редицата е ограничена отдолу от 0, т.е. $a_n > 0$, след което ще покажем, че е намаляваща.

Имаме $a_1 = 2 > 0$. Нека $a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{n+2} > 0$, следователно $a_n > 0$ за всяко n.

Образуваме частното $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2a_n}{(n+2)a_n} = \dfrac{2}{n+2} < 1 \quad \Rightarrow$ редицата е намаляваща и понеже е ограничена отдолу, според теоремата на Вайерщрас, тя е сходяща и нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$, защото това е същата редица.

Правим граничен преход в равенството $a_{n+1} = \dfrac{2a_n}{n+2}$.

Получаваме $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = 2\lim\limits_{n\to\infty} a_n . \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+2} \Rightarrow a = 2a.0 \Rightarrow a = 0$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Използвали сме, че след граничен преход в неравенствата $0 < \dfrac{1}{n+2} < \dfrac{1}{n}$, се получава, че $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+2} = 0$.

б) Ще докажем по индукция, че $a_n < 2$ за всяко n.

При $n = 1$, $a_1 = 1 < 2$. Нека $a_n < 2$. Тогава $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + 1 < \dfrac{2}{2} + 1 = 2$. Следователно $a_n < 2$ за всяко n $\Rightarrow$ редицата е ограничена отгоре.

Ще докажем, че редицата е растяща.

Образуваме разликата $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n}{2} + 1 - a_n = 1 - \dfrac{a_n}{2} > 0$ (защото $a_n < 2$) $\Rightarrow$ редицата е растяща и понеже е ограничена отгоре, то тя е сходяща.

Нека $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Правим граничен преход в равенството $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + 1 \Rightarrow$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{2} + \lim\limits_{n\to\infty} 1 \Rightarrow a = \dfrac{a}{2} + 1$, $a = 2$.

Следователно $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

в) Ще докажем по индукция, че $0 < a_n < 1$ за всяко n.

При $n = 1$ $a_1 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 0 < a_1 < 1$.

Нека $0 < a_n < 1$.

Образуваме разликата $a_{n+1} - 1 = a_n(2 - a_n) - 1 = -a_n^2 + 2a_n - 1 = -(a_n - 1)^2 < 0 \Rightarrow a_{n+1} < 1$.

От $a_n < 1 \Rightarrow 1 - a_n > 0 \Rightarrow 2 - a_n > 1$.

Тогава $a_{n+1} = a_n(2 - a_n) > 0.1 = 0 \Rightarrow a_{n+1} > 0$.

И така, използвайки аксиомата за математическата индукция, доказахме, че $0 < a_n < 1$ за всяко n.

Ще докажем, че редицата е растяща:

$a_{n+1}-a_n=a_n(2-a_n)-a_n=a_n-a_n^{\,2}=a_n(1-a_n)>0$ (защото $a_n>0$ и $1-a_n>0$).

Следователно редицата е сходяща и нека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

В равенството $a_{n+1}=a_n(2-a_n)$ правим граничен преход:

$\Rightarrow\ a=a(2-a),\quad a-a^2=0,\quad a(1-a)=0\quad\Rightarrow\quad a=0$ или $a=1$.

Редицата $\{a_n\}$ е растяща $\Rightarrow$ е ограничена отдолу от първия си член, т.е $a_n>a_1=\dfrac{1}{2}$.

В неравенството $a_n>\dfrac{1}{2}$ правим граничен преход и получаваме, че $a\geq\dfrac{1}{2}\ \Rightarrow\ a\neq0\Rightarrow a=1$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

г) Ще докажем по индукция, че $a_n<3$.

При $n=1$, $a_1=\sqrt{3}<3$.

Нека $a_n<3$.

$a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}<\sqrt{3+3}<\sqrt{9}=3$.

Следователно $a_n<3$ за всяко *n*.

Ще докажем по индукция, че $\{a_n\}$ е растяща, т.е. $a_{n+1}-a_n>0$ за всяко *n*.

При $n=1$, $a_1=\sqrt{3}$, $a_2=\sqrt{3+\sqrt{3}}\ \Rightarrow\ a_2>a_1$.

Нека $a_n-a_{n-1}>0$.

Имаме $a_n>a_{n-1}\ \Rightarrow\ 3+a_n>3+a_{n-1}>0\ \Rightarrow\ \sqrt{3+a_n}>\sqrt{3+a_{n-1}}$.

Лявата страна на последното неравенство е a_{n+1}, а дясната е $a_n\ \Rightarrow a_{n+1}>a_n$.

Следователно $a_{n+1}-a_n>0$ за вяко *n*.

Окончателно редицата $\{a_n\}$ е растяща и ограничена отгоре, следователно е сходяща и нека $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

След граничен преход в равенството $a_{n+1}=\sqrt{3+a_n}$, получаваме $a=\sqrt{3+a}$. Корените на това уравнение са $a=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ и $a=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Тъй като $a_n>0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\geq0\Rightarrow a=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, т.е $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

3) Редици, клонящи към безкрайност

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2n^3+5n^2}{4n^3+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3\left(-2+\dfrac{5}{n}\right)}{n^3\left(4+\dfrac{1}{n^3}\right)}=-\dfrac{1}{2}$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^5+3n^3+2}{3n^5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5\left(5+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{2}{n^5}\right)}{3n^5}=\dfrac{5}{3}$;

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{14n^4-1}{15n^5+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4\left(14-\dfrac{1}{n^4}\right)}{n^5\left(15+\dfrac{1}{n^5}\right)}=0$;

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-14n^5+7}{15n^4-7}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^5\left(-14+\dfrac{7}{n^5}\right)}{n^4\left(15-\dfrac{7}{n^4}\right)}=-\infty$;

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^6-5}{n^2-3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^6\left(1-\dfrac{5}{n^6}\right)}{n^2\left(1-\dfrac{3}{n^2}\right)}=\infty$;

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5-3n+n^2}{n^2+3n-5}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\left(\dfrac{5}{n^2}-\dfrac{3}{n}+1\right)}{n^2\left(1+\dfrac{3}{n}-\dfrac{5}{n^2}\right)}=1$;

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-9}{n-3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\left(1-\dfrac{9}{n^2}\right)}{n\left(1-\dfrac{3}{n}\right)}=\infty$:

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}}{\sqrt{n+5}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{4}{n}}\right)}{\sqrt{n}\sqrt{1+\dfrac{5}{n}}}=2$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n}}{3n+\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt{1+\dfrac{3}{n}}}{n\left(3+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)}=\dfrac{1}{4}$;

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2-3}+4}{-2\sqrt{n^2-n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\left(\sqrt{1-\dfrac{3}{n^2}}+\dfrac{4}{n}\right)}{n\left(-2\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\right)}=-\dfrac{1}{2}$;

20. $\lim\limits_{a_n \to 0} \dfrac{\sqrt{2+a_n} - \sqrt{2a_n+2}}{1-\sqrt{a_n+1}} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{a_n \to 0} \dfrac{(2+a_n-(2a_n+2))\left(1+\sqrt{a_n+1}\right)}{(1-(a_n+1))\left(\sqrt{2+a_n}+\sqrt{2a_n+2}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

21. $\lim\limits_{a_n \to 0} \dfrac{3a_n^{\ 2}+1}{5a_n^{\ 2}-1} = \lim\limits_{a_n \to 0} \dfrac{3a_n^{\ 2}+1}{5a_n^{\ 2}-1} = -1$;

22. $\lim\limits_{a_n \to -2} \dfrac{a_n^{\ 2}-4}{a_n+2} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{a_n \to -2} \dfrac{(a_n-2)(a_n+2)}{a_n+2} = 4$;

23. $\lim\limits_{a_n \to 1} \dfrac{2a_n^{\ 3}-5}{3a_n+2} = -\dfrac{3}{5}$;

24. $\lim\limits_{a_n \to 1} \dfrac{a_n^{\ 2}-1}{a_n-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{a_n \to 1} \dfrac{(a_n-1)(a_n+1)}{a_n-1} = 2$;

25. $\lim\limits_{a_n \to 3} \dfrac{\sqrt{a_n}-\sqrt{3}}{a_n^{\ 2}-9} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{a_n \to 3} \dfrac{a_n-3}{(a_n-3)(a_n+3)\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{3}\right)} = \dfrac{\sqrt{3}}{36}$.

26. $\lim\limits_{a_n \to 2} \dfrac{\sqrt{a_n}-\sqrt{2}}{a_n^{\ 2}-4} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{a_n \to 2} \dfrac{a_n-2}{(a_n-2)(a_n+2)\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{2}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{16}$;

27. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{5n}-\sqrt{n+5}\right) = [\infty-\infty] = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5n-(n+5)}{\left(\sqrt{5n}+\sqrt{n+5}\right)} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n\left(4-\dfrac{5}{n}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{5}+\sqrt{1+\dfrac{5}{n}}\right)} = \infty$;

28. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{4n+3}-2\sqrt{n}+\dfrac{5}{n^2+1}\right) = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{4n+3-4n}{\sqrt{4n+3}+2\sqrt{n}} + \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{5}{n^2+1} = 0+0 = 0$;

29. $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{5n-1}-\sqrt{4n+1}}{\sqrt{7n+7}-\sqrt{4n-3}} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sqrt{n}\left(\sqrt{5-\dfrac{1}{n}}-\sqrt{4+\dfrac{1}{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{7+\dfrac{7}{n}}-\sqrt{4-\dfrac{3}{n}}\right)} = \dfrac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{7}-2}$;

30. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{\sqrt{4n^3-2}-\sqrt{n}}{\sqrt{9n^3-2}-\sqrt{n^3-9}} + \dfrac{4n^3-2}{9n^3-2}\right) =$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n^3}\left(\sqrt{4-\dfrac{2}{n^3}}-\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^3}\left(\sqrt{9-\dfrac{2}{n^3}}-\sqrt{1-\dfrac{9}{n^3}}\right)} + \lim_{n \to \infty} \frac{n^3\left(4-\dfrac{2}{n^3}\right)}{n^3\left(9-\dfrac{2}{n^3}\right)} = 1+\frac{4}{9} = \frac{13}{9}.$$

2.5. Сума на безкрайно намаляваща геометрична прогресия

1. а) Имаме $a_1 = 1$ и $q = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $S = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$;

б) Имаме $a_1 = 3$ и $q = -\frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $S = \dfrac{3}{1+\frac{1}{3}} = \frac{9}{4}$.

2. а) $0 < q = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ $\Rightarrow$ прогресията е безкрайно намаляваща

$$\Rightarrow S = \frac{2\sqrt{3}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{2\sqrt{3}.\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = 3\left(\sqrt{3}+1\right)$$

б) $0 < q = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ $\Rightarrow$ прогресията е безкрайно намаляваща

$$\Rightarrow S = \frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 2\left(\sqrt{2}+1\right).$$

3. Във формулата $S = \dfrac{a_1}{1-q}$ заместваме даденото:

а) $20 = \dfrac{a_1}{1-\frac{1}{4}}$, $20 = \dfrac{4a_1}{3}$, $a_1 = 15$;

б) $\dfrac{2}{3} = \dfrac{a_1}{1-\frac{3}{7}}$, $a_1 = \dfrac{8}{21}$;

в) $5 = \dfrac{5}{3}.\dfrac{1}{1-q}$, $q = \dfrac{2}{3}$;

г) $\dfrac{10}{3} = \dfrac{0,7}{1-q}$, $q = 0,79$.

4. $q = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ прогресията е безкрайно намаляваща $\Rightarrow$ $S = \dfrac{a_1}{1-q}$

$$\Rightarrow 2 = \frac{a_1}{1-\frac{1}{2}},\ a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = a_1.q = \frac{1}{2}.$$

5. Имаме системата: $\left|\begin{array}{l} a_1 + a_1q + a_1q^2 = 3,5 \\ 4 = \dfrac{a_1}{1-q} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a_1(1+q+q^2) = 3,5 \\ a_1 = 4(1-q) \end{array}\right.$.

От второто уравнение $q = \dfrac{4-a_1}{4}$, заместваме в първото:

$$a_1\left(1+\frac{4-a_1}{4}+\frac{16-8a_1+a_1^2}{16}\right)=\frac{7}{2} \Leftrightarrow a_1^3-12a_1^2+48a_1-56=0.$$

Като използваме схемата на Хорнер полученото уравнение приема вида

$(a_1-2)\left(a_1^2-10a_1+28\right)=0$.

Квадратният тричлен в скобите има отрицателна дискриминанта $\Rightarrow$ $a_1 = 2$ и $q = \dfrac{1}{2}$.

6. Условието в задачата е изпълнено за всички членове на прогресията, следователно е изпълнено и за a_1. Тъй като сумата на всички членове след a_1 е $S - a_1$, то е изпълнено равенството:

$a_1 = 2(S - a_1)$, откъдето $S = \dfrac{3a_1}{2}$.

Като използваме формулата $S = \dfrac{a_1}{1-q}$, получаваме $\dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{3a_1}{2}$. Тъй като $a_1 \neq 0$, то $q = \dfrac{1}{3}$

7. Имаме $a_1 = 1 \Rightarrow a_2 = q$ и $a_3 = q^2$.

Според условието на задачата $2\dfrac{1}{2}a_2 = a_1 + a_3 \Rightarrow \dfrac{5q}{2} = 1 + q^2$, $2q^2 - 5q + 2 = 0$.

Корените на уравнението са $q = 2$ и $q = \dfrac{1}{2}$.

Прогресията е безкрайно намаляваща $\Rightarrow q = \dfrac{1}{2} \Rightarrow S = \dfrac{1}{1-q} = 2$.

Проект № 1
Метод на неопределените коефициенти

Представяме рационалната дроб $\dfrac{3x}{(2-x)(x+1)}$ във вида:

$$\frac{3x}{(2-x)(x+1)} = \frac{A}{2-x} + \frac{B}{x+1}.$$

$$3x = Ax + A + 2B - Bx$$
$$3x = (A-B)x + A + 2B$$

Сравнявайки коефициентите пред съответните степени на x, получаваме системата:

$\left|\begin{array}{l} A+2B=0 \\ A-B=3 \end{array}\right.$, чието решение е $A=2,\ B=-1$.

Следователно рационалната дроб $\dfrac{3x}{(2-x)(x+1)}$ се представя, като сума от елементарни дроби по следния начин:

$$\frac{3x}{(2-x)(x+1)} = \frac{2}{2-x} - \frac{1}{x+1}.$$

Проект № 2
Граница на редица

Вярното твърдение е (4):

Ако модулът на общия член на една редица е по-малък от $\dfrac{1}{n}$, то границата ѝ е 0.

Доказателство.

Нека за редицата $\{a_n\}$ е изпълнено $|a_n| < \dfrac{1}{n}$. Това означава, че са изпълнени неравенствата

$$-\frac{1}{n} < a_n < \frac{1}{n}.$$

Правим граничен преход. Тъй като $\lim\limits_{n\to\infty}(-\dfrac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ и като използваме теоремата за граничен преход в неравенства, получаваме, че $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Редицата от (А) може да се представи във вида $x_n = \begin{cases} -1, & \text{при } n \text{ четно} \\ 1, & \text{при } n \text{ нечетно} \end{cases}$.

Първите няколко члена на редицата са: $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$

Тази редица е ограничена, защото $|x_n| = 1$, но не е сходяща.

Контрапример за твърдение (2).

Редицата от (Б) може да се представи във вида $x_n = \begin{cases} \dfrac{3}{n}\ , \text{ при } n \text{ четно} \\ \dfrac{1}{n}\ , \text{ при } n \text{ нечетно} \end{cases}$.

Редицата е сходяща и границата ѝ е 0.

$\Rightarrow$ редицата е ограничена.

Редицата не е монотонна, което се вижда, ако се запишат първите няколко члена на редицата: $1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{5}, \dfrac{3}{6}, \dfrac{1}{7}, \ldots$

Контрапример за твърдение (1).

Редицата от (В) може да се представи във вида $x_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n}\ , \text{ при } n \text{ четно} \\ 0\ , \text{ при } n \text{ нечетно} \end{cases}$.

Първите няколко члена на редицата са: $0, \dfrac{2}{2}, 0, \dfrac{2}{3}, 0, \dfrac{2}{4}, 0, \dfrac{2}{5}, 0, \dfrac{2}{6}, 0, \ldots$

Редицата е сходяща и границата ѝ е 0.

Редицата не е монотонна.

Безброй нейни членове са равни на границата ѝ 0.

Контрапример за (3) и за (1).

Проект № 4

Граница на редица, зададена с рекурентна формула

$a_1 = 2$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2}$, $n \geq 1$.

Тъй като $a_n > 0$ за всяко n, образуваме частното $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{a_n}{2a_n} = \dfrac{1}{2} < 1$.

Следователно $a_{n+1} < a_n$, т.е редицата е намаляваща.

$a_n > 0$ за всяко $n \Rightarrow$ редицата е ограничена отдолу и от теоремата на Вайерщрас следва, че тя е сходяща

Нека . $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

В равенството $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2}$ правим граничен преход и получаваме $A = \dfrac{A}{2} \Rightarrow A = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$