3. Функции. Непрекъснатост и диференцируемост – решения на задачите

3.3. Граница на функция

2. $\lim\limits_{\substack{x_n \to 2 \\ x_n < 2}} f(x_n) = \lim\limits_{\substack{x_n \to 2 \\ x_n < 2}} \frac{x_n{}^2 - 4}{x_n - 2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{\substack{x_n \to 2 \\ x_n < 2}} (x_n + 2) = 4$.

$\lim\limits_{\substack{x_n \to 2 \\ x_n > 2}} f(x_n) = \lim\limits_{\substack{x_n \to 2 \\ x_n > 2}} 4 = 4$.

Следователно функцията има граница при $x \to 2$.

3. $\lim\limits_{\substack{x_n \to 3 \\ x_n < 3}} f(x_n) = \lim\limits_{\substack{x_n \to 3 \\ x_n < 3}} (x_n{}^2 + 3) = 12$

$\lim\limits_{\substack{x_n \to 3 \\ x_n > 3}} f(x_n) = \lim\limits_{\substack{x_n \to 3 \\ x_n > 3}} (3x_n + 2) = 11$.

Следователно функцията няма граница при $x \to 3$.

4. $\lim\limits_{\substack{x_n \to 3 \\ x_n < 3}} f(x_n) = \lim\limits_{\substack{x_n \to 3 \\ x_n < 3}} \frac{x_n - 3}{3} = 0$.

Нека $a = 3 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x_n \to 3 \\ x_n > 3}} f(x_n) = \lim\limits_{\substack{x_n \to 3 \\ x_n > 3}} \frac{(x_n - 3)^2}{x_n - 3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{\substack{x_n \to 3 \\ x_n > 3}} (x_n - 3) = 0 \Rightarrow$ при $a = 3$ функцията има граница при $x \to 3$.

Нека $a \neq 3 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x_n \to 3 \\ x_n > 3}} f(x_n) = \lim\limits_{\substack{x_n \to 3 \\ x_n > 3}} \frac{(x_n - a)^2}{x_n - 3} = \infty \Rightarrow$ при $a \neq 3$ функцията няма граница при $x \to 3$.

Отговор $a = 3$.

5. $\lim\limits_{\substack{x_n \to 5 \\ x_n < 5}} f(x_n) = \lim\limits_{\substack{x_n \to 5 \\ x_n < 5}} (\sqrt{x_n + 4} - \sqrt{x_n}) = 3 - \sqrt{5}$.

$\lim\limits_{\substack{x_n \to 5 \\ x_n > 5}} f(x_n) = \lim\limits_{\substack{x_n \to 5 \\ x_n > 5}} (1,5(x_n - 3) - \sqrt{5}) = 3 - \sqrt{5}$

Следователно функцията има граница при $x \to 5$.

3.4. Теореми за граници на функции

1. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+x-1}{3x^2-1}=\dfrac{9}{11}$.

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x^2+3x+2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x+1)(x-1)}=4$

в) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x^2+x-1}=1$

г) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{3-x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1-4)}{-(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}=-\dfrac{1}{4}$;

2. Да се намери границата.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+1-1)(\sqrt{x+1}+1)}{(x+1-1)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\dfrac{2}{3}$.

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt[3]{x+8}-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x+4-4)\left(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4\right)}{(x+8-8)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=3.$

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{\sqrt[3]{x^3+7}-2x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)\left(\sqrt[3]{(x^3+7)^2}+2x\sqrt[3]{x^3+7}+4x^2\right)}{x^3+7-8x^3}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+2)\left(\sqrt[3]{(x^3+7)^2}+2x\sqrt[3]{x^3+7}+4x^2\right)}{-7(x-1)(x^2+x+1)}=-\dfrac{12}{7}$.

г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+4}-2}{\sqrt{2x}-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2+4-8)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{(2x-4)\left(\sqrt[3]{(x^2+4)^2}+2\sqrt[3]{x^2+4}+4\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{2(x-2)\left(\sqrt[3]{(x^2+4)^2}+2\sqrt[3]{x^2+4}+4\right)}=\dfrac{2}{3}$.

д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-2+\sqrt[3]{x+6}}{\sqrt{x+2}-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+6-8)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x+2-4)\left(\sqrt[3]{(x+6)^2}+2\sqrt[3]{x+6}+4\right)}=\dfrac{1}{3}$.

е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{3x^2+5}-2}{x^2+2x-3}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+5-8}{(x^2+2x-3)\left(\sqrt[3]{(3x^2+5)^2}+2\sqrt[3]{3x^2+5}+4\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)\left(\sqrt[3]{(3x^2+5)^2}+2\sqrt[3]{3x^2+5}+4\right)}=\dfrac{1}{8}$.

4) Разширяване на понятието граница на функция

5. а) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^5-3x^2+1}{3x^5+2x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^5\left(2-\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(3+\dfrac{2}{x^4}\right)}=\dfrac{2}{3}$;

б) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x^4+2x}{2x^4+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^4\left(-1+\dfrac{2}{x^3}\right)}{x^4\left(2+\dfrac{1}{x^4}\right)}=-\dfrac{1}{2}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^4+x+1}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^4\left(1+\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=+\infty$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5+x+1}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5\left(1+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=\infty$;

д) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5+x+1}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5\left(1+\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^5}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}=-\infty$;

е) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^5+2x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^5\left(-2+\dfrac{2}{x^4}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=-\infty$;

ж) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x^5+2x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5\left(-2+\dfrac{2}{x^4}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\infty$.

6. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+3x}-\sqrt{3x+2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+3x-3x-2}{\left(\sqrt{1+3x}+\sqrt{3x+2}\right)}=0$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+4-x^2}{\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)}=0$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-\sqrt{x^2+3}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-x^2-3}{\left(x^2+\sqrt{x^2+3}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4\left(1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{x^4}\right)}{x^2\left(1+\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{3}{x^4}}\right)}=\infty$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+4}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}+\sqrt{2+\dfrac{4}{x}}\right)=\infty$;

д) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{3x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{2x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{3+\dfrac{1}{x}}\right)}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt{2+\dfrac{1}{x}}\right)}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}}$;

е) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{2-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)}{\sqrt{3x}}=\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$;

ж) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+1}-\sqrt[3]{x^3+x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1-x^3-x^2-1}{\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}+\sqrt[3]{x^3+1}\sqrt[3]{x^3+x^2+1}+\sqrt[3]{\left(x^3+x^2+1\right)^2}}=$

$$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{x^3}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^3}}\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}+\sqrt[3]{\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}\right)^2}\right)}=-\frac{1}{3};$$

з) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{3x+2}}\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{3+\dfrac{2}{x}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

7. а) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{5x+1}{x^2-4} = -\infty$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{4}{6-x-x^2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{4}{-(x-2)(x+3)} = \infty$

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{-3x}{3x-x^2-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{-3x}{-(x-1)(x-2)} = -\infty$;

г) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} \dfrac{x+1}{x-3} = -\infty$;

д) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} \dfrac{x+1}{x-3} = \infty$;

е) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \dfrac{1-x}{x-4} = \infty$

ж) $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} \dfrac{1-x}{x-4} = -\infty$.

9. а) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3+2x^2-2x+3}{x^2+5x+6} = \lim\limits_{x\to -3} \dfrac{(x+3)(x^2-x+1)}{(x+3)(x+2)} = -13$

б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-x^2-x-2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x^2+x+1)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{7}{4}$;

в) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^4-3x^3+5x^2-6x+2}{2x^2+3x-2} = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^3-2x^2+4x-4)}{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x+2)} = -\dfrac{9}{20}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{x^2-4}{x-2} + \dfrac{4-x^2}{\sqrt{2}-\sqrt{x}} \right) = \lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2} + \dfrac{(2-x)(2+x)\left(\sqrt{2}+\sqrt{x}\right)}{(2-x)} \right) = 4+8\sqrt{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{2x^2-x-1}{x-1} + \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}}{x-1} \right) =$

$= \lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{(x-1)(2x+1)}{x-1} + \dfrac{2x+1-x-2}{(x-1)\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+2}\right)} \right) = 3+\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{x^2-2x-3}{2x^2+2x}+\dfrac{2x+1}{2x^2+1}\right)=\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{(x+1)(x-3)}{2x(x+1)}+\dfrac{2x+1}{2x^2+1}\right)=\dfrac{5}{3}$;

б) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x-1}{x^2-3x+2}+\dfrac{3x^2-1}{3x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x-1}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{3x^2-1}{3x-1}\right)=0$.

12. а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{3x^3-x}{2x}+\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{2x+1}}{2-\sqrt{x+4}}\right)=$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{x(3x^2-1)}{2x}+\frac{(x+1-2x-1)\left(2+\sqrt{x+4}\right)}{(4-x-4)\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{2x+1}\right)+\sqrt[3]{(2x+1)^2}}\right)=\frac{5}{6};$$

б) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^4+2x^3-2x^2+2x-3}{x^2-x}+\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x^2-1}\right)=$

$$=\lim_{x\to1}\left(\frac{(x-1)(x^3+3x^2+x+3)}{x(x-1)}+\frac{x+1-2}{(x-1)(x+1)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{2}\right)}\right)=8+\frac{\sqrt{2}}{8}.$$

13. а) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{2x^2-6}{x^2-3x}-\dfrac{x+1}{x-3}\right)=\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{2x^2-6}{x(x-3)}-\dfrac{x+1}{x-3}\right)=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-6-x^2-x}{x(x-3)}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x+2)}{x(x-3)}=\dfrac{5}{3}$;

б) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x^2-8}{x^2-4}+\dfrac{1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x^2-8}{(x-2)(x+2)}+\dfrac{1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-8+x+2}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{5}{4}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{x^2+9}{x^2-1}+\dfrac{5}{x+1}\right)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+9+5x-5}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+1)(x+4)}{(x-1)(x+1)}=-\dfrac{3}{2}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}}{\sqrt{3x}-\sqrt{x+2}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+3-4x)\left(\sqrt{3x}+\sqrt{x+2}\right)}{(3x-x-2)\left(\sqrt{x+3}+2\sqrt{x}\right)}=-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$;

б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{\sqrt{2x+1}-3}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}-3\right)}{2x+1-9}=3$;

в) $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}+\dfrac{\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x-2}}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-3)(x+3)}+\dfrac{\sqrt{x^2-3x+1}-\sqrt{x-2}}{x-2}\right)=\dfrac{2}{3}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{2-x-x^2}-(x+\sqrt{2})\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2-x-x^2-x^2-2\sqrt{2}x-2}{x\left(\sqrt{2-x-x^2}+(x+\sqrt{2})\right)}=-\dfrac{4+\sqrt{2}}{4}$;

б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x-2}{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}+\dfrac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}\right)=\dfrac{1}{2}$.

3.5. Основни граници

2. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x}.2=2$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}=\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x}=1.1=1$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x.3x}{2x\sin 3x}=1$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}=1$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cos x}{x}=1$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}3x}{\sin\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin\frac{x}{2}\cos 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 3x}{3x}.\dfrac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.\dfrac{1}{\cos 3x}.\dfrac{3x}{\frac{x}{2}}\right)=6$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}\cos 3x}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{x}{2}\cos 3x}{\frac{x}{2}.2.5}=\dfrac{1}{10}$.

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\mathrm{tg}4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x.\cos 4x}{\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x.\ 4x\ .\ \cos 4x}{2\mathrm{x}\ .\ \sin.4x}.\dfrac{2x}{4x}\right)=\dfrac{1}{2}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\alpha x.\ \beta x}{\alpha x.\ \sin\beta x}.\dfrac{\alpha x}{\beta x}\right)=\dfrac{\alpha}{\beta}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x.\alpha}{\alpha x}=\alpha$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha x}{\mathrm{tg}\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}.\cos\beta x\right)=\dfrac{\alpha}{\beta}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\alpha x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}.\dfrac{\sin\alpha x}{\alpha x}.\alpha^2\right)=\alpha^2$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left(2.\left(\dfrac{\sin\frac{1}{2}x}{x}\right)^2\right)=2.\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 2x}{2\sin^2 x}=2^2=4$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 5x\sin 3x}{x(1-\cos 2x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x.\sin 3x}{\cos^2 5x.x.2\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 5x}{\sin^2 x}.\dfrac{\sin 3x}{x}.\dfrac{1}{2\cos^2 5x}\right)=5^2.3.\dfrac{1}{2}=\dfrac{75}{2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+\cos^2 x-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}.\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\sin x}.2\right)=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{2}.2=\dfrac{1}{2}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{\mathrm{tg}^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\sin x}{\sin^2 x}.\cos^2 x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}.\cos^2 x\right)=1$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{x\,\mathrm{tg}x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 2x}{x\sin x}.\cos x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{x}.\dfrac{\sin 2x}{\sin x}.\cos x\right)=2.2=4$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{\mathrm{tg}^2 15x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 5x}{\sin^2 15x}.\cos^2 15x\right)=\left(\dfrac{5}{15}\right)^2=\dfrac{1}{9}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}3x}{\sin^2\dfrac{x}{3}}=.\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\sin^2\dfrac{x}{3}.\cos 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin\dfrac{x}{3}}.\dfrac{\sin 3x}{\sin\dfrac{x}{3}}.\dfrac{1}{\cos 3x}\right)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}}.\dfrac{3}{\dfrac{1}{3}}.1=27$

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 2x}{x^2\cos x}+\dfrac{2\sin^2 x\ \mathrm{tg}x}{3x^2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}.\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{2}{3}.\dfrac{\sin^2 x}{x^2}.\mathrm{tg}x\right)=2^2.1+\dfrac{2}{3}.1.0=4$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{\sqrt{2}x}{2}\cos\dfrac{\sqrt{2}x}{2}-2x}{x}+\dfrac{1-\cos 3x}{\mathrm{tg}2x}\right)=$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\dfrac{\sqrt{2}x}{2}}{x}.\cos\dfrac{\sqrt{2}x}{2}-\dfrac{2x}{x}+2.\dfrac{\sin\dfrac{3x}{2}}{\sin 2x}.\sin\dfrac{3x}{2}.\cos 2x\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.1-2+2.\dfrac{\dfrac{3}{2}}{2}.0.1=\dfrac{\sqrt{2}-4}{2}.$$

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2x\sin 3x}{\mathrm{tg}^2 6x}+\dfrac{3x\sin 4x}{\mathrm{tg}^2 12x}\right)=$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\left(2.\dfrac{x}{\sin 6x}.\dfrac{\sin 3x}{\sin 6x}.\cos^2 6x+3.\dfrac{x}{\sin 12x}.\dfrac{\sin 4x}{\sin 12x}.\cos^2 12x\right)=2.\dfrac{1}{6}.\dfrac{3}{6}.1+3.\dfrac{1}{12}.\dfrac{4}{12}.1=\dfrac{1}{4};$$

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\cos x}{\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{3}}+\dfrac{\sin 3x}{\mathrm{tg}\dfrac{x}{3}}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{\mathrm{tg}^2\dfrac{x}{3}}+\dfrac{\sin 3x}{\mathrm{tg}\dfrac{x}{3}}\right)=2\left(\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{1}{3}}\right)^2+\dfrac{3}{\dfrac{1}{3}}=\dfrac{27}{2}.$

9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1-1}{\sin 5x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 5x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\dfrac{1}{5}.\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{10}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x^2}-2}{1-\cos 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4+x^2-4}{2\sin^2 2x\left(\sqrt{4+x^2}+2\right)}=\dfrac{1}{32}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}=$

$$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}{1+\sin x-1+\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{tg}x}{2\sin x}\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)\right)=1.$$

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}(\text{tg}x-\sin x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\left(\frac{1-\cos x}{\cos x}\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x.2.\sin^2\frac{x}{2}}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^3}\left((1-\cos x)\sin x-\sin^3\frac{x}{2}\right)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2\sin^2\frac{x}{2}.\sin x}{x^3}-\frac{\sin^3\frac{x}{2}}{x^3}\right)=\frac{3}{8}$.

3.6. Непрекъснатост

1. $f(1)=2$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(3x-1)=2=f(1)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x^2+1)=2=f(1)$

$\Rightarrow$ функцията е непрекъсната при $x=1$.

2. $f(2)=2a-5$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{\sin(x-2)}{x-2}=1$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}(2a-5)=2a-5=f(2)$.

За да бъде функцията непрекъсната при $x=2$, трябва да е изпълнено $2a-5=1$, $a=3$.

Директно се проверява, че при $a=3$ функцията е непрекъсната в точката $x=2$.

3. $f(0)=a\cos 0=a$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\text{tg}2x}{ax}=\frac{2}{a}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(a\cos 3x)=a=f(0)$.

За да бъде функцията непрекъсната при $x=0$, трябва $\frac{2}{a}=a$, $a=\pm\sqrt{2}$.

Директно се проверя, че при $a=\pm\sqrt{2}$ функцията е непрекъсната в точката $x=0$.

Следователно стойностите на a, за които $f(x)$ е непрекъсната при $x=0$, са $a=\pm\sqrt{2}$.

4. а) При $x<3$ $f(x)=\dfrac{x+2}{5}$ е непрекъсната за всяко $x<3$.

При $x\geq 3$ $f(x)=4-x$ е непрекъсната за всяко $x>3$ и непрекъсната отдясно при $x=3$.

Остава да проверим дали $f(x)$ е непрекъсната отляво при $x=3$.

Имаме $f(3)=1$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\dfrac{x+2}{5}=1=f(3)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ е непрекъсната отляво при $x=3$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ е непрекъсната за всяко x.

б) При $x\neq 0$ $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{x}$ е непрекъсната функция.

Остава да проверим дали $f(x)$ е непрекъсната при $x=0$.

Имаме $f(0)=\dfrac{1}{2}$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{\sin 2x}{x}=2\neq\dfrac{1}{2}=f(0)$.

Следователно $f(x)$ е прекъсната при $x=0$ и непрекъсната при $x\neq 0$.

в) При $x\in[-1,1)$ $f(x)=x^2-1$ е непрекъсната функция.

При $x\in[1,2]$ $f(x)=2x-1$ е непрекъсната функция за всяко $x\in(1,2]$ и непрекъсната отдясно при $x=1$.

$f(1)=1$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x^2-1)=0\neq 1=f(1)$.

Следователно $f(x)$ е прекъсната при $x=1$ и непрекъсната при $x\in[-1,1)\bigcup(1,2]$.

5. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} x^2=4$. (1)

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=4$. (2)

$\Rightarrow$ лявата и дясната граница на $f(x)$ при $x\to 2$ съвпадат и са равни на 4. Тогава дефинираме функцията $g(x)$, така:

$$g(x)=\begin{cases} x^2\ , & \text{при } x<2\\ 4\ , & \text{при } x=2\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{при } x>2\end{cases}$$

$\Rightarrow$ $g(x)$ е дефинирана за всяко x, при $x\neq 2$ съвпада с $f(x)$ и е непрекъсната за всяко x

6. Имаме $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\dfrac{x+a}{x-2}$. Тази граница е $+\infty$ или $-\infty$ при $a\neq -2$ и равна на 1 при $a=-2$.

Тъй като при $a=-2$ $f(2)=-2\neq 1$, то няма стойности на a, за които функцията е непрекъсната при $x=2$.

7. Намираме лявата и дясната граница на функцията при $x\to 1$:

$$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{3(x-1)^2(x-2)^2}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{3(x-1)^2(x-2)^2}{(x-1)(x-2)}=0$$

$$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{3(x-1)^2(x-2)^2}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{3(x-1)^2(x-2)^2}{(x-1)(x-2)}=0.$$

Дефинираме $f(1)=0$, тогава $f(x)$ ще е непрекъсната при $x=1$.

Аналогично получаваме, че ако $f(2)=0$, то $f(x)$ ще е непрекъсната при $x=2$.

8. а) $f(x)$ е дефинирана за всяко.

При $x<3$ и при $x>3$ $f(x)$ е дефинирана като функции, които са непрекъснати в съответните интервали.

Трябва да проверим дали $f(x)$ е непрекъсната при $x=3$.

Имаме $f(3)=-6$.

$$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\frac{(x-3)^2}{x-3}=0\neq -6=f(3).$$

Следователно $f(x)$ е прекъсната при $x=3$ и непрекъсната при $x\neq 3$.

б) При $x<0$ $f(x)$ е непрекъсната. При $x\in(0,1)$ $f(x)$ е непрекъсната. При $x>1$ и $x\neq 3$ $f(x)$ е непрекъсната.

Остава да изследваме непрекъснатостта на функцията в точките 0 и 1.

Имаме $f(0)=4$ и $f(1)=3$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\dfrac{\sin^2 2x}{x^2}=4$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\dfrac{x^2-5x+4}{1-x}=4$ $\Rightarrow$ $f(x)$ е непрекъсната в точката 0.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{x^2-5x+4}{1-x}=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{(x-1)(x-4)}{-(x-1)}=3$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{1-7x^2}{x-3}=3$ $\Rightarrow$ $f(x)$ е непрекъсната в точката 1.

$\Rightarrow$ $f(x)$ е непрекъсната навсякъде в дефиниционната си област.

в) $f(x)$ е дефинирана за всяко $x \neq \frac{1}{6}$.

При $x<0$ $f(x)$ е непрекъсната, при $x \in (0,3)$ и $x \neq \frac{1}{6}$ $f(x)$ е непрекъсната, при $x>3$ $f(x)$ е непрекъсната.

Остава да изследваме непрекъснатостта на функцията в точките 0 и 3.

Имаме $f(0)=2$ и $f(3)=\frac{3}{17}$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2=f(0).$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}6.\frac{\sqrt{4-x}-1}{6x^2-19x+3}=2=f(0)\ \Rightarrow\ f(x)$$ е непрекъсната в точката 0.

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}6.\frac{\sqrt{4-x}-1}{6x^2-19x+3}=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\left(6.\frac{4-x-1}{(x-3)(6x-1)\left(\sqrt{4-x}+1\right)}\right)=-\frac{3}{17}\neq\frac{3}{17}=f(3).$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ е прекъсната в точката 3.

Окончателно: $f(x)$ е прекъсната при $x=3$ и непрекъсната за всяко $x \neq 3$ от дефиниционната си област.

9. $f(x)$ е непрекъсната за всяко $x \neq 0$.

$f(0)=a$.

Имаме $-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$.

Нека $x<0$

$\Rightarrow$ $-x \ge x\sin\frac{1}{x} \ge x$. Правим граничен преход при $x \to 0$ и получаваме, че $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0$.

Нека $x>0$

$\Rightarrow$ $-x \le x\sin\frac{1}{x} \le x$. Правим граничен преход при $x \to 0$ и получаваме, че $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0$.

Следователно лявата и дясната граница на функцията при $x \to 0$ са равни и са равни на 0.

Ако $a=0$, $f(0)=0$, ако $a \neq 0$, $f(0) \neq 0$.

Окончателно: при $a=0$ функцията е непрекъсната за всяко x.

3.7. Теореми за непрекъснатост

2. а) Нека $f(x)=x^4-5x-1$, $f(x)$ е непрекъсната за всяко x.

$f(-1)=5>0$ и $f(0)=-1<0$.

Сега, като използваме теоремата на Болцано, получаваме, че съществува число $x_0\in(-1,0)$, така че $f(x_0)=0$, т.е x_0 е корен на даденото уравнение.

б) $f(x)=x^5+x^4+x^2-1$, $f(x)$ е непрекъсната за всяко x.

$f(0)=-1<0$ и $f(1)=2>0$.

Според теоремата на Болцано следва, че съществува число $x_0\in(0,1)$, така че $f(x_0)=0$, т.е x_0 е корен на даденото уравнение.

4. $f(x)=x^4-3x^3+3x^2-6x+2$, $f(x)$ е непрекъсната за всяко x.

Пресмятаме някои стойности на функцията:

$f(0)=2>0$

$f(1)=-3<0$

$f(2)-6<0$

$f(3)=11>0$

$\Rightarrow$ според теоремата на Болцано съществуват числа $x_1\in(0,1)$ и $x_2\in(2,3)$, такива че $f(x_1)=0$ и $f(x_2)=0$.

5. $f(x)$ е дефинирана при $x=0$ и $f(0)=\operatorname{tg}\pi+\cos 0=1>0$.

$f(x)$ не е дефинирана при $x=\dfrac{\pi}{2}$.

$f(x)$ е дефинирана при $x=\dfrac{\pi}{4}$ и $f(\dfrac{\pi}{4})=\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{4}=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0$.

$f(x)$ е непрекъсната в интервала $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ $\Rightarrow$ съществува число $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)\subset\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, така че $f(x_0)=0$.

6. Нека $f(x)=3\log_2 x-x$, $f(x)$ е непрекъсната при $x>0$.

Пресмятаме:

$f(1)=-1<0$

$f(2)=1>0$

$f(16)=-4<0$

$\Rightarrow$ според теоремата на Болцано съществуват числа $x_1 \in (1,2)$ и $x_2 \in (2,16)$, такива че $f(x_1)=0$ и $f(x_2)=0$.

7. Нека $f(x)=2^x-(x^2+1)$, $f(x)$ е непрекъсната за всяко x.

Пресмятаме:

$f(4)=-1<0$

$f(5)=6>0$

$\Rightarrow$ според теоремата на Болцано съществува число $x_0 \in (4,5) \subset \left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)$, така че $f(x_0)=0$.

8. Нека $f(x)=\sqrt{x+1}-x$, $f(x)$ е непрекъсната при $x \geq -1$.

Имаме $f(1)=\sqrt{2}-1>0$ и $f(2)=\sqrt{3}-2<0$.

$\Rightarrow$ според теоремата на Болцано съществува число $x_0 \in (1,2)$, така че $f(x_0)=0$.

10. Нека $\varphi(x)=\log_2 x-1{,}022$, $\varphi(x)$ е непрекъсната за $x>0$.

$\varphi(2)=1-1{,}022<0$

$\varphi(4)=2-1{,}022>0$

$\Rightarrow$ според теоремата на Болцано съществува число $x_0 \in (2,4)$, така че $\varphi(x_0)=0$, т.е. $f(x_0)=1{,}022$.

11. Нека $f(x)=3x^3-2x^2-x+1$, $f(x)$ е непрекъсната за всяко x.

$f(0)=1>0$

$f(-1)=-3<0$, отговор В.

12. Нека $f(x)=2^x-x^3$, $f(x)$ е непрекъсната за всяко x.

$f(9)=2^9-9^3=512-729<0$

$f(10)=2^{10}-10^3=1024-1000>0$, отговор Г.

13. Нека $\varphi(x)=x^2-2+\sqrt{2}$, $\varphi(x)$ е непрекъсната за всяко x.

$\varphi(-1)=-1+\sqrt{2}>0$

$\varphi(0)=-2+\sqrt{2}<0$, отговор А.

14. Нека $\varphi(x)=\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\varphi(x)$ е непрекъсната за всяко $x \neq 1$.

$\varphi(-3)>0$

$\varphi(-2)<0$, отговор А.

3.9. Връзка между непрекъснатост и диференцируемост

1. $f(-2)=0$

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\frac{\sin(2x+4)-0}{x+2}=2$$

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\frac{(-x^2-2x)-0}{x+2}=2$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ има лява и дясна производна в точката -2 и те са равни $\Rightarrow$ $f(x)$ е диференцируема при $x=-2$.

2. $f(\frac{1}{2})=\frac{5}{2}$

$$\lim_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ x<\frac{1}{2}}}\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ x<\frac{1}{2}}}\frac{2x+\frac{3}{2}-\frac{5}{2}}{x-\frac{1}{2}}=2.$$

$$\lim_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}}\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}}\frac{2x^2+a-\frac{5}{2}}{x-\frac{1}{2}} \quad (1)$$

При $a=2$ (1) приема вида $\lim_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}}\frac{2(x^2-\frac{1}{4})}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ x>\frac{1}{2}}}\frac{2(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=2.$

При $a\neq 2$ границата (1) е $+\infty$ или $-\infty$.

$\Rightarrow$ При $a=2$ функцията е диференцируема в точката $\frac{1}{2}$.

3. $f(1)=1$.

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{2x-1-1}{x-1}=2.$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ е диференцируема при $x=1$.

4. $f(2)=4$.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{8-2x-4}{x-2}=-2.$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ не е диференцируема при $x=2$.

5. $f(a)=a^2$.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{ax-a^2}{x-a}=a.$$

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{\sin(x-a)+x^2-a^2}{x-a}=1+2a.$$

За да бъде диференцируема функцията, трябва $a=1+2a$, $a=-1$.

Директно се проверява, че при $a=-1$ функцията е диференцируема в точката $x=-1$.

6. $f(2)=\sin 2$.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{\sin x-\sin 2}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{2\cos\frac{x+2}{2}\sin\frac{x-2}{2}}{x-2}=\cos 2.$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{x\cos x-2\cos x+\sin 2-\sin 2}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{(x-2)\cos x}{x-2}=\cos 2.$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ е диференцируема при $x=2$.

7. $f(2)=13$.

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{4x+5-13}{x-2}=4.$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x.>2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{x^2+9-13}{x-2}=4.$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ е диференцируема при $x=2$.

8. $f(0)=2$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin 5x+2-2}{x}=5.$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x^2+5x+2-2}{x}=5.$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ е диференцируема при $x=0$.

9. $f(2)=4$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{x^2-4}{x-2}=4.$$

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}-4}{x-2}=\frac{2}{3}.$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ не е диференцируема при $x=2$.

10. $f(-1)=0$.

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}}\frac{1-x^2}{x+1}=2.$$

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}}\frac{(x+1)(1+\cos(x+1))}{x+1}=2.$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ е диференцируема при $x=-1$.

11. $f(0)=1$.

$$\lim_{\substack{x\to .0\\ x<0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin 3x+a-1}{x}. \quad (1)$$

При $a=1$ границата (1) приема вида $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin 3x}{x}=3$.

При $a\neq 1$ границата (1) е ∞ или $-\infty$.

$$\lim_{\substack{x\to .0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{ax^2+bx+1-1}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{x^2+bx}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x+b)=b.$$

За да бъде функцията диференцируема в точката $x=0$ трябва $b=3$.

Директно се проверява, че при $a=1$, $b=3$ функцията е диференцируема в точката $x=0$.