3. Стереометрия – решения на задачите

Навсякъде в решенията на задачите (освен ако не е казано друго):

– триъгълните и четириъгълните призми се означават $ABCA_1B_1C_1$ и $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Аналогични означения се използват и за пресечените пирамиди;

– триъгълните и четириъгълните пирамиди се означават $ABCM$ и $ABCDM$ с връх M. Проекцията на върха в равнината на основата е O.

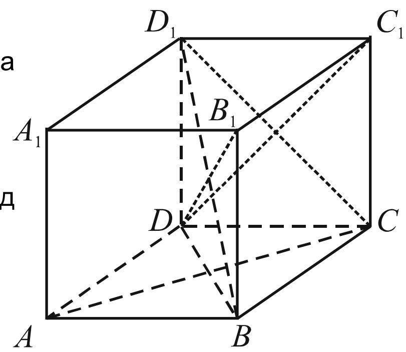
3.2. Перпендикулярност в пространството

6. а) Проекцията на BD_1 в равнината (ABC) е BD.

$BD \perp AC$ и $AC \subset (ABC)$ $\Rightarrow$ $BD_1 \perp AC$ според теоремата за трите перпендикуляра.

б) Проекцията на DB_1 в равнината (DCC_1) е DC_1.

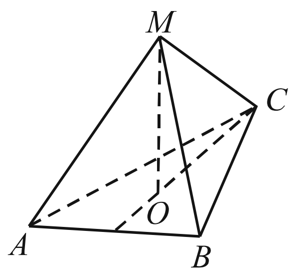
$DC_1 \perp CD_1$ и $CD_1 \subset (DCC_1)$ $\Rightarrow$ $DB_1 \perp CD_1$ според теоремата за трите перпендикуляра.



7. Ще докажем задачата за ръбовете MC и AB.

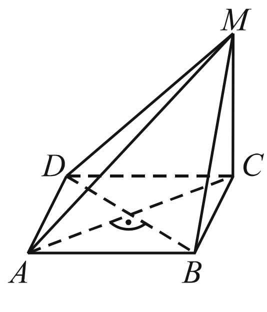
Проекцията на MC в равнината (ABC) е CO.

$CO \perp AB$ $\Rightarrow$ $MC \perp AB$ според теоремата за трите перпендикуляра.



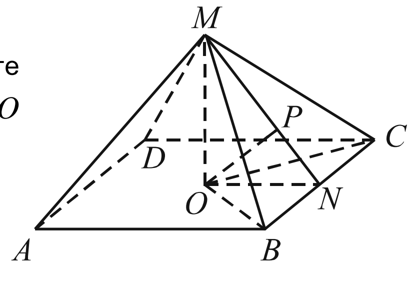
8. Проекцията на върха M в равнината (ABC) е точка C $\Rightarrow$ проекцията на AM в (ABC) е AC.

$AC \perp BD$ (като диагонали в ромб) $\Rightarrow$ $AM \perp BD$ според теоремата за трите перпендикуляра.

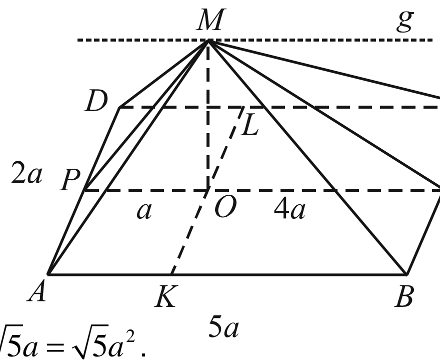


9. Проекцията на MN в равнината на основата е ON. Тъй като P лежи на MN, то проекцията на правата OP в равнината на основата е ON.

По условие $OP \perp BC$ $\Rightarrow$ $ON \perp BC$ според теоремата за трите перпендикуляра $\Rightarrow$ N е средата на BC (в правилна пирамида ΔBCO е равнобедрен).



10. а) Обемът се пресмята непосредствено: $V = \frac{1}{3}.2a.5a.2a = \frac{20}{3}a^3$.



Проекцията на MF в равнината на основата е OF, но $OF \perp BC$, тогава от теоремата за трите перпендикуляра следва, че $MF \perp BC$. Аналогично се доказва, че $MP \perp AD$.

От ΔOFM: $MF = \sqrt{4a^2 + 16a^2} = 2\sqrt{5}a \Rightarrow S_{BCM} = \frac{1}{2}.2a.2\sqrt{5}a = 2\sqrt{5}a^2$.

От ΔOPM: $MP = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5}a \Rightarrow S_{ADM} = \frac{1}{2}.2a.\sqrt{5}a = \sqrt{5}a^2$.

Нека правата през точка O, която е успоредна на AD, пресича AB и DC съответно в точки K и $L \Rightarrow OK = OL = a$.

$OK \perp AB$, $K \in AB \Rightarrow$ проекцията на MK е $OK \Rightarrow MK \perp AB$ (по теоремата за трите перпендикуляра). От ΔKOM: $MK = \sqrt{a^2 + 4a^2} = \sqrt{5}a$.

Триъгълниците ADM и BCM са равнобедрени, откъдето получаваме, че $\Delta ABM \cong \Delta DCM$.

$$S_{ABM} = S_{DCM} = \frac{1}{2}.5a.a\sqrt{5} = \frac{5\sqrt{5}a^2}{2}.$$

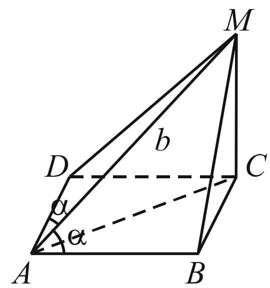
$$\Rightarrow S_1 = 2\sqrt{5}a^2 + \sqrt{5}a^2 + 2.\frac{5\sqrt{5}a^2}{2} = 8\sqrt{5}a^2.$$

б) Нека $(MAB) \cap (MCD) = g$. Правата $AB \parallel (MCD)$ (защото е успоредна на DC) $\Rightarrow AB$ не пресича g. Тъй като правите AB и g лежат в една равнина – (MAB) $\Rightarrow AB \parallel g$.

От друга страна $AB \perp (KLM)$, (защото е перпендикулярна на пресичащите се прави KL и MO) $\Rightarrow g \perp (KLM) \Rightarrow \angle KML = \varphi$. От ΔKOM: $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{KO}{MO} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$.

в) Тъй като $(\sqrt{5}a)^2 + (2\sqrt{5}a)^2 = 25a^2 = PF^2$, то ΔPFM е правоъгълен и $\angle PMF = 90°$. Аналогично на б) се доказва, че $\angle PMF$ е линеен ъгъл на двустенния ъгъл между равнините (MAD) и $(MBC) \Rightarrow (MAD) \perp (MBC)$.

11. Нека $MC \perp (ABC) \Rightarrow AM = b$ и $\angle BAM = \angle DAM = \alpha$.



Проекцията на BM е BC, но $BC \perp AB \Rightarrow BM \perp AB$ (според теоремата за трите перпендикуляра).

От ΔABM: $\cos\alpha = \frac{AB}{b} \Rightarrow AB = b\cos\alpha \Rightarrow S_{ABCD} = b^2\cos^2\alpha$ и $AC = \sqrt{2}AB = \sqrt{2}b\cos\alpha$.

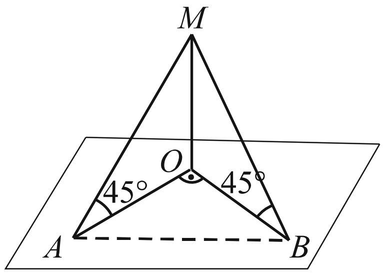
От ΔACM: $MC = \sqrt{b^2 - 2b^2\cos^2\alpha} = b\sqrt{1 - 2\cos^2\alpha}$.

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}b^2\cos^2\alpha.b\sqrt{1-2\cos^2\alpha} = \frac{b^3}{3}\cos^2\alpha\sqrt{1-2\cos^2\alpha},$$

$$V = \frac{b^3}{3}\cos^2\alpha\sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

3.3. Перпендикуляр и наклонена

2. Нека наклонените са MA и MB. Тогава $MA = MB$, защото образуват равни ъгли с ранината на основата, откъдето следва, че и проекциите им са равни $AO = BO = a$, където O е проекцията на точка M.

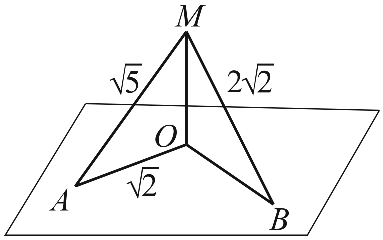


От ΔAOM: $MO = a \Rightarrow AM = \sqrt{2}a$. Аналогично $BM = \sqrt{2}a$.

ΔABO е правоъгълен (по условие $AO \perp BO$) $\Rightarrow AB = \sqrt{2}a \Rightarrow$ ΔABM е равностранен $\Rightarrow \angle AMB = 60°$.

3. Нека проекцията на M е $O \Rightarrow AO = \sqrt{2}$.

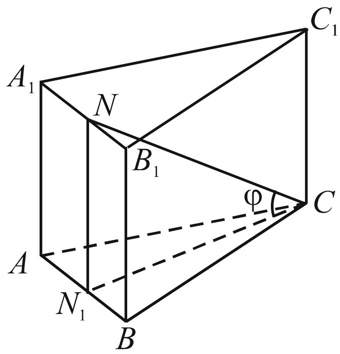
От ΔAOM: $MO = \sqrt{5-2} = \sqrt{3}$. От ΔOBM: $BO = \sqrt{8-3} = \sqrt{5}$.



4. Нека $AB = AA_1 = a$ и N_1 е средата на $AB \Rightarrow NN_1 \parallel AA_1 \Rightarrow N_1$ е проекцията на $N \Rightarrow$ $\angle N_1CN = \varphi$.

От равностранния ΔABC: $CN_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ и тъй като $NN_1 = AA_1 = a$,

то от ΔNN_1C намираме $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{NN_1}{CN_1} = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.



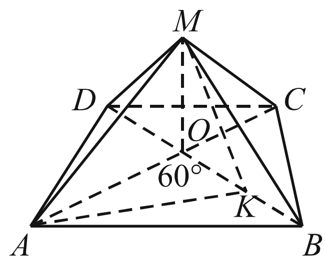
5. От ΔOBM намираме $BO = \sqrt{25-16} = 3$.

ΔABO е равностранен $\Rightarrow AO = BO = 3$.

AO и BO са проекциите на наклонените AM и $BM \Rightarrow$ $AM = BM = 5$.

Нека $AK \perp BO$, $K \in BO$ и $AK \perp MO \Rightarrow AK \perp (DBM)$.

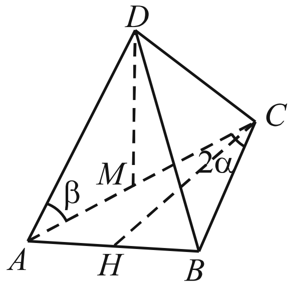
Тогава проекцията на AM в равнината (DBM) е $MK \Rightarrow \varphi = \angle AMK$.



От равностранния ΔABO: $AK = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. От правоъгълния ΔAKM: $\sin\varphi = \dfrac{AK}{AM} = \dfrac{3\sqrt{3}}{10}$.

6. Нека M е средата на $AC \Rightarrow DM$ е височината на пирамидата $\Rightarrow$ $(ACD) \perp (ABC)$

$\Rightarrow$ ортогоналната проекция върху (ACD) на всяка права от (ABC), която не е перпендикулярна на AC, ще е правата AC $\Rightarrow$ $\angle(BC, ACD) = \angle ACB = 2\alpha$. В случая, когато $BC \perp AC$ имаме $BC \perp (ACD)$ и отново $\angle ACB = \angle(BC, ACD)$.



Проекцията на правата AD върху (ABC) е AC $\Rightarrow$ $\angle DAC = \angle(AD, ABC) = \beta$.

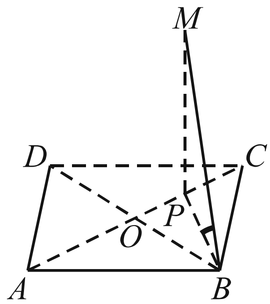
Нека в ΔABC височината към AB е $h \Rightarrow$ $\text{tg}\alpha = \dfrac{a}{2h}$ $\Rightarrow$ $h = \dfrac{a}{2\text{tg}\alpha}$ $\Rightarrow$ $S_{ABC} = \dfrac{a^2}{4\text{tg}\alpha}$.

Отново от ΔABC: $\sin\alpha = \dfrac{a}{2AC}$ $\Rightarrow$ $AC = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$ $\Rightarrow$ $AM = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a}{4\sin\alpha}$.

Сега от ΔAMD: $\text{tg}\beta = \dfrac{DM}{AM}$ $\Rightarrow$ $DM = \dfrac{a\,\text{tg}\beta}{4\sin\alpha}$.

За обема намираме $V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2}{4\text{tg}\alpha}.\dfrac{a\text{tg}\beta}{4\sin\alpha} = \dfrac{a^3\cos\alpha\,\text{tg}\beta}{48\sin^2\alpha}$.

7. Търсеният ъгъл е $\angle MBP = \varphi$.



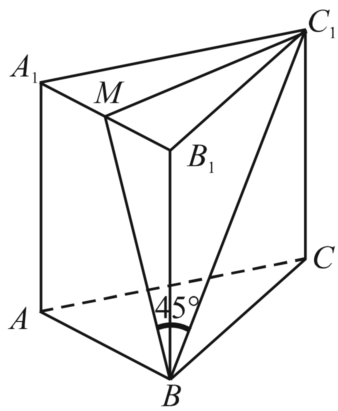
В квадрата $ABCD$ диагоналът $AC = 2$ $\Rightarrow$ $CP = \dfrac{1}{4}AC = \dfrac{1}{2}$.

Нека O е пресечната точка на диагоналите на квадрата $ABCD$ $\Rightarrow$ $OP = CP = \dfrac{1}{2}$, $BO = 1$.

Като приложим питагоровата теорема за ΔOBP, намираме $BP = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

От ΔBPM получаваме $\text{tg}\varphi = \dfrac{MP}{BP} = \dfrac{3,5.2}{\sqrt{5}} = \dfrac{7\sqrt{5}}{5}$.

8. Нека $C_1M \perp A_1B_1$ и тъй като $C_1M \perp BB_1$ $\Rightarrow$ $C_1M \perp (ABB_1A_1)$ $\Rightarrow$ проекцията на BC_1 върху (ABB_1A_1) е BM $\Rightarrow$ $\angle(BC_1, ABB_1A_1) = \angle MBC_1 = 45°$.



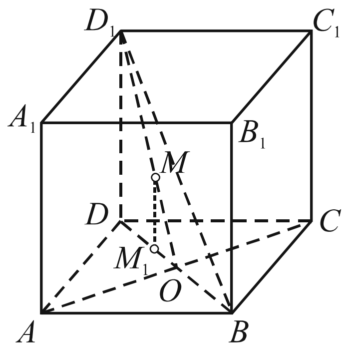
Така получихме, че ΔMBC_1 е равнобедрен и правоъгълен

$\Rightarrow BM = MC_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. От правоъгълния ΔMBB_1 намираме

$BB_1 = \sqrt{BM^2 - MB_1^2} = \sqrt{\dfrac{a^2.3}{4} - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

За обема получаваме $V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{6}}{8}$.

9. а) Проекцията на D_1O върху $(ABCD)$ е OD $\Rightarrow$ $\varphi = \angle(D_1O, ABC) = \angle DOD_1$.



Ако ръбът на куба е a, то $BD = a\sqrt{2}$, $DO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$,

$\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{DD_1}{DO} = \dfrac{a.2}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

б) D_1O е медиана в ΔDBD_1 $\Rightarrow$ медицентърът M лежи на D_1O и $D_1M : MO = 2:1$.

Нека проекцията на M е M_1 $\Rightarrow$ проекцията на D_1M е DM_1 и по условие $DM_1 = \sqrt{2}$.

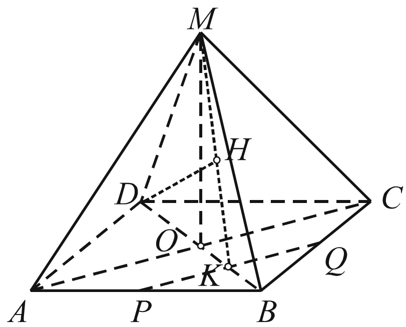
Като използваме теоремата на Талес, имаме $DM_1 : M_1O = 2:1$ $\Rightarrow$ $DO = \dfrac{3}{2}DM_1 = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$

$BD = 2DO = 3\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $AB = \dfrac{BD}{\sqrt{2}} = 3$. Тогава обемът на куба е $V = AB^3 = 27$.

3.4. Двустенен ъгъл. Перпендикулярност на две равнини

3. Нека $AC \cap BD = O$ и $PQ \cap BD = K$.

Нека $DH \perp MK$, $H \in MK$. Ще докажем, че DH е търсеното разстояние. За целта трябва да докажем, че $DH \perp (PQM)$.



Имаме $PQ \perp (DBM)$ (защото $PQ \perp BD$ и $PQ \perp MO$).

Тъй като $PQ \subset (PQM)$, то равнините (PQM) и (DBM) са перпендикулярни и тяхната пресечница е MK.

Правата DH е перпендикулярна на пресечницата им и лежи в едната от тези равнини (DBM). Според доказаната теорема DH е перпендикулярна и на другата равнина; $DH \perp (PQM)$.

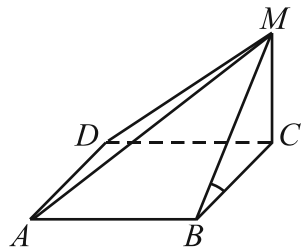
Доказахме, че DH е разстоянието от D до равнината (PQM). Намирането на DH става от ΔDBM.

Имаме $MO = 3$, $MB = 5 \Rightarrow BO = 4$ и $DO = 4$.

PQ е средна отсечка в $\Delta ABC \Rightarrow K$ е средата на $BO \Rightarrow OK = 2$ и от ΔOKM намираме $MK = \sqrt{13}$.

Изразявайки лицето на ΔDKM по два начина получаваме $DH.MK = DK.MO \Rightarrow$ $DH.\sqrt{13} = 6.3$, $DH = \dfrac{18\sqrt{13}}{13}$.

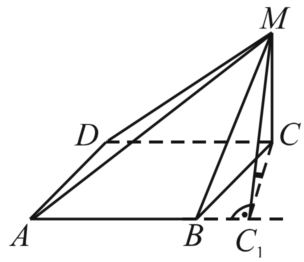
4. Равнините (ABC) и (BCM) са перпендикулярни, защото равнината (BCM) съдържа $MC \perp (ABC)$ и следователно мярката на двустенния им ъгъл е $90°$.



Пресечницата на равнините (ABC) и (ABM) е AB. Тъй като $AB \perp BC$ и $AB \perp MC$, то равнината (BCM) е перпендикулярна на ръба AB на двустенния $\angle(ABC; ABM)$ и следователно $\angle CBM$ е негов линеен ъгъл.

5. Както в задача 4. $\angle(ABC, BCM) = 90°$.

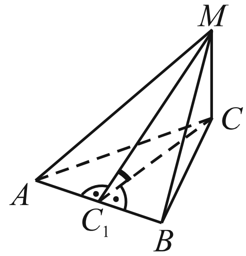
Нека $CC_1 \perp AB$, $C_1 \in AB$.



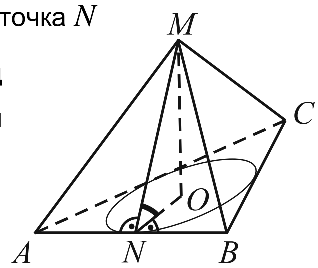
Проекцията на MC_1 в равнината (ABC) е CC_1. От теоремата за трите перпендикуляра следва, че $MC_1 \perp AB \Rightarrow \angle CC_1M$ е линеен ъгъл на двустенния $\angle(ABC, ABM)$.

6. Както в предходните две задачи $\angle(ABC, BCM) = 90°$.

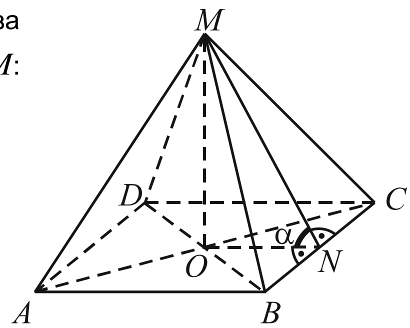
Нека $CC_1 \perp AB$, $C_1 \in AB$.



Проекцията на MC_1 в равнината (ABC) е CC_1. От теоремата за трите перпендикуляра следва, че $MC_1 \perp AB \Rightarrow \angle CC_1M$ е линеен ъгъл на двустенния $\angle(ABC, ABM)$.



7. Нека вписаната в триъгълника окръжност се допира до страната AB в точка N $\Rightarrow$ $ON \perp AB$. Проекцията на MN в равнината на основата е ON и според теоремата за трите перпендикуляра $MN \perp AB$ $\Rightarrow$ $\angle ONM$ е линеен ъгъл на двустенния $\angle(ABC, ABM)$.



8. Нека $MN \perp BC$, $N \in BC$ е апотема на пирамидата.

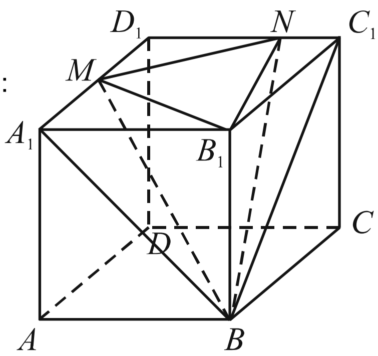
Проекцията на MN е $ON \Rightarrow$ $ON \perp BC$ (според теоремата за трите перпендикуляра) $\Rightarrow$ $\angle ONM = \alpha$. От ΔONM: $MN = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$.

$$S_1 = 4.\frac{a.MN}{2} + a^2 = \frac{4a^2}{4\cos\alpha} + a^2 = \frac{a^2(1+\cos\alpha)}{\cos\alpha} = \frac{2a^2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

3.5. Многостен

2. Нека $d(B_1, MBN) = x$. Ще намерим x, като изразим обема на пирамидата $MNBB_1$ по два начина – веднъж, като пирамида с основа MNB_1 и веднъж, като пирамида с основа MNB.

Намираме лицето на ΔMNB_1 от квадрата $A_1B_1C_1D_1$ като разлика на лица: $S_{MNB_1} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{12} \Rightarrow V_{MNB_1B} = \frac{1}{3} S_{MNB_1}.BB_1 = \frac{5}{36}$.



Сега ще намерим лицето на ΔMNB. Последователно пресмятаме:

От ΔNBC_1: $BN = \sqrt{2 + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{19}}{3}$.

От ΔA_1MB: $BM = \sqrt{2 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$.

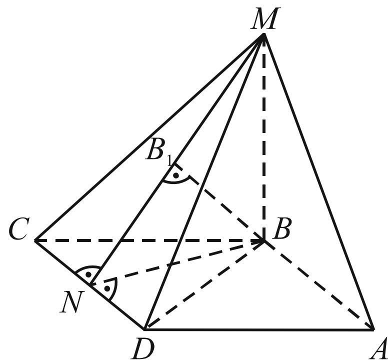
От ΔMND: $MN = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4}{9}} = \frac{5}{6}$.

От ΔMNB по косинусовата теорема намираме $\cos \angle BMN = \dfrac{\frac{9}{4} + \frac{25}{36} - \frac{19}{9}}{2.\frac{3}{2}.\frac{5}{6}} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \sin \angle BMN = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \Rightarrow \quad S_{MNB} = \frac{MN.BM.\sin \angle BMN}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{12}$.

От равенството $V_{MNBB_1} = \frac{1}{3}.S_{MNB}.x$ получаваме $\frac{5}{36} = \frac{1}{3}.\frac{5\sqrt{2}}{12}.x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Точка B лежи в околните стени (CBM) и (ABM) и значи разстоянието до тях не може да бъде $\sqrt{3}$. Нека разстоянието от B до (CDM) е $\sqrt{3}$.



По условие $BC = BD = BA = 4$ и тъй като те са проекции на наклонени през точка M, то и $MC = MD = MA$. Освен това триъгълниците CDB и ABD са равнострании, а триъгълниците CDM и ADM са равнобедрени. Тогава, ако N е средата на CD, то $MN \perp CD$ и $BN \perp CD$, откъдето следва, че $CD \perp (NBM)$.

В равнината (NBM) построяваме $BB_1 \perp MN$, $B_1 \in MN \Rightarrow BB_1 \perp CD$. Получихме, че BB_1 е перпендикулярна на две пресичащи се прави MN и CD от равнината (CDM) $\Rightarrow BB_1 \perp (CDM) \Rightarrow BB_1 = \sqrt{3}$.

В правоъгълния ΔNBM знаем височината към хипотенузата $BB_1 = \sqrt{3}$ и катета $BN = 2\sqrt{3}$ (от равностранния ΔCDB), следователно можем да намерим другия катет и $BM = 2$.

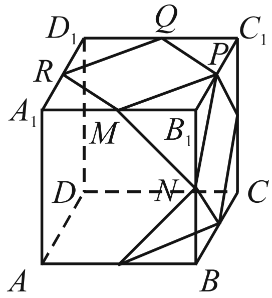
Окончателно за обема на пирамидата намираме:

$V = \frac{1}{3} S_{ABCD}.MB = \frac{1}{3}.2.\frac{16\sqrt{3}}{4}.2 = \frac{16\sqrt{3}}{3}$.

Ако разстоянието от B до (DAM) е $\sqrt{3}$, резултатът е същият.

4. Нека M, N, P, Q и R са средите съответно на A_1B_1, BB_1, B_1C_1, D_1C_1 и A_1D_1.

Тогава $MPQR$ е квадрат със страна $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, а ΔMNP е равностранен със страна $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Повърхнината на полученото тяло се състои от 6 квадрата и 8 равностранни триъгълника. Лицето на повърхнината е:



$$S = 6.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 8.\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4} = a^2(3+\sqrt{3}).$$

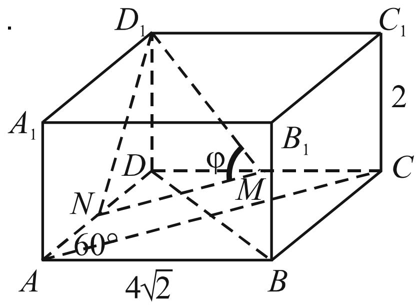
5. Правите AC и D_1M, са кръстосани.

Нека $MN \parallel AC,\ N \in AD \Rightarrow \angle(AC, D_1M) = \angle(MN, D_1M) = \varphi$.

В равностранния ΔABD $\frac{1}{2}AC = \frac{4\sqrt{2}.\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{6}$.

Тогава $MN = \frac{AC}{2} = 2\sqrt{6}$ (средна отсечка в ΔACD).

От правоъгълния ΔD_1DM, в който $DD_1 = 2$ и $DM = 2\sqrt{2}$, намираме $D_1M = 2\sqrt{3}$.

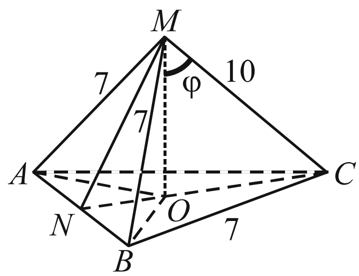


Наклонените D_1N и D_1M през точка D_1 са равни, защото имат равни проекции. Тогава ΔNMD_1 е равнобедрен с основа $MN = 2\sqrt{6}$ и бедро $D_1M = 2\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $\cos\varphi = \frac{MN}{2D_1M} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow \varphi = 45°$ (φ е ъгъл при основата на равнобедрен триъгълник $\Rightarrow$ φ е остър ъгъл).

6. Нека $MA = MB = 7$ cm и $MC = 10$ cm.

Триъгълниците ABC и ABM са еднакви равностранни и ако N е средата на AB, е изпълнено $MN = \frac{7\sqrt{3}}{2}$ cm и $CN = \frac{7\sqrt{3}}{2}$ cm.

Наклонените MA и MB са равни, следователно са рани и проекциите им AO и BO, следователно точка O лежи на CN.



От равнобедрения ΔMNC, на който знаем и трите страни, намираме височината към бедрото $MO = \frac{10\sqrt{47}}{7\sqrt{3}}$ cm.

За обема на пирамидата получаваме $V = \frac{1}{3}S_{ABC}.MO = \frac{1}{3}.\frac{49\sqrt{3}}{4}.\frac{10\sqrt{47}}{7\sqrt{3}} = \frac{35\sqrt{47}}{6}$ cm^3.

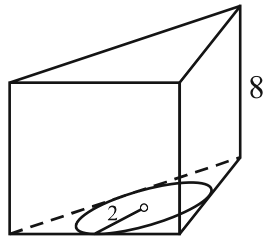
В ΔOCM $\angle OMC = \varphi$ и $\cos\varphi = \frac{MO}{MC} = \frac{10\sqrt{47}}{7\sqrt{3}.10} = \frac{\sqrt{141}}{21}$.

7. Нека страната на основата е $a \Rightarrow\ r = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} \ \Rightarrow\ a = 2r\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ cm.

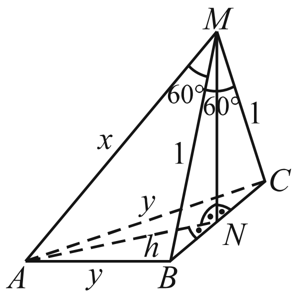
Височината на призмата е 8 cm $\Rightarrow V = \frac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}.8 = 96\sqrt{3}$ cm^3.

За лицето на повърхнината намираме

$S_1 = 3.4\sqrt{3}.8 + 2.\frac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 120\sqrt{3}$ cm^2.



8. Триъгълник BCM е равнобедрен с ъгъл $60°$, следователно е равностранен със страна 1 и ако $MN \perp BC,\ N \in BC$, то $MN = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и също така N е средата на BC.



По условие равнините (BCM) и (ABC) са перпендикулярни и MN от равнината (BCM) е перпендикулярна на тяхната пресечница $BC \Rightarrow MN \perp (ABC)$.

Да означим $AM = x$.

$\Delta ABM \cong \Delta ACM$ (по две страни и ъгъл $60°$ между тях) $\Rightarrow AB = AC = y$. Получихме, че ΔABC е равнобедрен с основа $BC \Rightarrow AN \perp BC$ и да означим $AN = h$.

От ΔANM: $x^2 = h^2 + MN^2,\ \ x^2 = h^2 + \frac{3}{4}$.

От ΔABN: $h^2 = y^2 - BN^2,\ \ h^2 = y^2 - \frac{1}{4}$.

$\Rightarrow x^2 = y^2 - \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \ \Rightarrow\ x^2 = y^2 + \frac{1}{2} \ \Rightarrow\ y^2 = x^2 - \frac{1}{2}$. (1)

Прилагаме косинусовата теорема за ΔABM за страната $AB = y$.

$\Rightarrow\ y^2 = x^2 + 1 - 2x\cos 60° \ \Rightarrow\ y^2 = x^2 - x + 1$. (2)

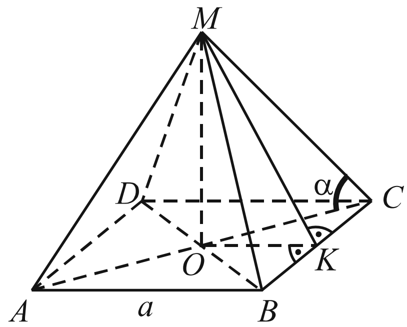
От (1) и (2) получаваме уравнение за x:

$x^2 - \frac{1}{2} = x^2 - x + 1,\ \ x = \frac{3}{2}$.

$\Rightarrow\ h = \sqrt{x^2 - \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

$\Rightarrow\ S_{ABC} = \frac{BC.h}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} \ \Rightarrow\ V = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{6}}{4}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

9. По условие $AB = a$ и $\angle ACM = \alpha$.



От ΔOCM: $\text{tg}\alpha = \dfrac{MO}{OC} \Rightarrow MO = \dfrac{a\sqrt{2}\,\text{tg}\alpha}{2}$.

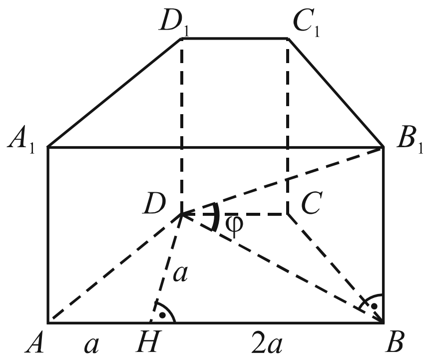
$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}.a^2.\dfrac{a\sqrt{2}\,\text{tg}\alpha}{2} = \dfrac{a^3\sqrt{2}\,\text{tg}\alpha}{6}$.

Апотемата на пирамидата MK, $MK \perp BC$, $K \in BC$ намираме от ΔOKM:

$$MK = \sqrt{MO^2 + OK^2} = \sqrt{\frac{a^2.2.\text{tg}^2\alpha}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{2\text{tg}^2\alpha + 1}.$$

$$\Rightarrow S = \frac{4a.MK}{2} = 2.\frac{a^2}{2}\sqrt{2\text{tg}^2\alpha + 1} = a^2\sqrt{2\text{tg}^2\alpha + 1}.$$

10. Нека DH, $H \in AB$ е височина в трапеца $\Rightarrow AH = a$, $BH = 2a$.



$\Rightarrow BD = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5}$.

От правоъгълния ΔDBB_1 имаме $\cos\angle BDB_1 = \dfrac{BD}{DB_1} \Rightarrow$

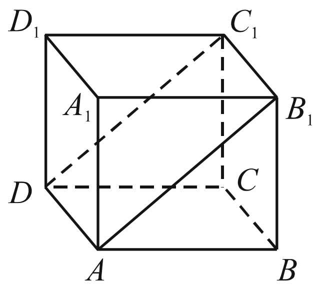
$\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{DB_1} \Rightarrow DB_1 = a\sqrt{21}$;

$BB_1 = \sqrt{DB_1^{\,2} - BD^2} = \sqrt{21a^2 - 5a^2} = 4a. \Rightarrow$

$V = S_{ABCD}.BB_1 = \dfrac{(a+3a)\,a}{2}.4a = 8a^3$.

11. Четириъгълникът AB_1C_1D е правоъгълник, защото $AD \parallel B_1C_1$, $AD = B_1C_1$, $AD \perp (ABB_1)$.

Нека a е страната на квадрата $ABCD$ и $AB_1 = d$.



По условие $S_{AB_1C_1D} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

От друга страна $S_{AB_1C_1D} = AD.AB_1 = ad \Rightarrow$

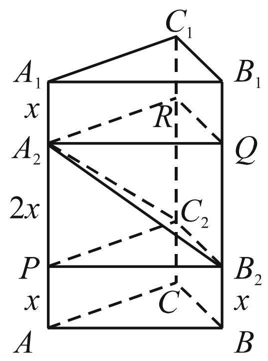
$ad = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. (1)

$\cos\angle BAB_1 = \dfrac{a}{d} = \dfrac{\sqrt{2}}{6}$, $a = \dfrac{\sqrt{2}d}{6}$. (2)

От (1) и (2) намираме $d = 3$, $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

От ΔABB_1: $BB_1 = \sqrt{d^2 - a^2} = \sqrt{9 - \dfrac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{17}{2}}$. $\Rightarrow V = a^2 BB_1 = \dfrac{\sqrt{34}}{4}$.

12. Нека $A_1A_2 = BB_2 = CC_2 = x \;\Rightarrow\; AA_1 = 4x$.



Да изберем точки P, Q и R съответно върху ръбовете AA_1, BB_1 и CC_1, така че $AP = B_1Q = C_1R = x \;\Rightarrow\; A_2P = 2x$.

Да означим с S лицето на основата.

Четириъгълникът ABB_2P е правоъгълник (защото $x = AP$) $\Rightarrow$ $PB_2 = AB$.

Аналогично се доказва, че $B_2C_2 = BC$ и $PC_2 = AC$.

Следователно $\Delta PB_2C_2 \cong \Delta ABC \;\Rightarrow\; ABCPB_2C_2$ е правилна триъгълна призма с лице на основата S и височина $x \Rightarrow V_{ABCPB_2C_2} = Sx$.

За обема на пирамидата $PB_2C_2A_2$ имаме $V_{PB_2C_2A_2} = \dfrac{2Sx}{3}$.

За обема на тялото „под" равнината $A_2B_2C_2$ получаваме:

$$V_{ABCPB_2C_2} + V_{PB_2C_2A_2} = Sx + \frac{2Sx}{3} = \frac{5Sx}{3}.$$

Обемът на дадената призма $V_{ABCA_1B_1C_1} = 4Sx$. Тогава обемът на тялото „над" равнината $A_2B_2C_2$ е равен на $4Sx - \dfrac{5Sx}{3} = \dfrac{7Sx}{3}$.

Търсеното отношение е $\dfrac{5Sx}{3} : \dfrac{7Sx}{3} = \dfrac{5}{7}$.

3.6. Сечение на многостен с равнина

2. Използваме формулата, получена в задача 1 от урока.

а) $h = \sqrt{k^2 - \dfrac{(a-b)^2}{4}}$.

$S_1 = 4.\dfrac{a+b}{2}.k + a^2 + b^2 = 2(a+b)k + a^2 + b^2$.

$V = \dfrac{1}{3}\sqrt{k^2 - \dfrac{(a-b)^2}{4}}(a^2 + b^2 + \sqrt{a^2b^2}) = \dfrac{1}{3}\sqrt{k^2 - \dfrac{(a-b)^2}{4}}(a^2 + b^2 + ab)$.

б) $h = \sqrt{25 - \dfrac{(9-3)^2}{4}} = \sqrt{25 - \dfrac{36}{4}} = 4$.

$S_1 = 4.\dfrac{(9+3).5}{2} + 81 + 9 = 210$.

$V = \dfrac{4}{3}(81 + 9 + 27) = 156$.

в) $h = \sqrt{2 - \dfrac{(4-2)^2}{4}} = 1$.

$S_1 = 4.\dfrac{(4+2)\sqrt{2}}{2} + 16 + 4 = 20 + 12\sqrt{2}$.

$V = \dfrac{1}{3}(16 + 4 + 8) = \dfrac{28}{3}$.

4. Използваме формулите, получени в задача 3 от урока.

а) $h = \sqrt{k^2 - \dfrac{(a-b)^2}{12}} = \sqrt{7 - \dfrac{(7-1)^2}{12}} = 2$ cm.

$l = \sqrt{h^2 + \dfrac{(a-b)^2}{3}} = \sqrt{4 + \dfrac{(7-1)^2}{3}} = 4$ cm.

$V = \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{49\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1.\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\dfrac{7^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{\sqrt{3}}{4}}\right) = \dfrac{19\sqrt{3}}{2}$ cm^3.

б) $h = \sqrt{k^2 - \dfrac{(a-b)^2}{12}} = \sqrt{12 - \dfrac{36}{12}} = 3$ cm.

$l = \sqrt{h^2 + \dfrac{(a-b)^2}{3}} = \sqrt{9 + \dfrac{36}{3}} = \sqrt{21}$ cm.

$V = \dfrac{3}{3}\left(\dfrac{64\sqrt{3}}{4} + \dfrac{4\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\dfrac{64\sqrt{3}}{4}.\dfrac{4\sqrt{3}}{4}}\right) = 21\sqrt{3}$ cm^3.

5. Да намерим обема, когато $h = 3$.

За голямата основа a последователно намираме: $k^2 = h^2 + \frac{(a-b)^2}{4}$, $25 = 9 + \frac{(a-2)^2}{4}$, $a = 10$ cm.

$\Rightarrow V = \frac{3}{3}(100+4+20) = 124$ cm^3.

Да намерим обема, когато $h = 4$.

Имаме $k^2 = h^2 + \frac{(a-b)^2}{4}$, $a = 8$ cm.

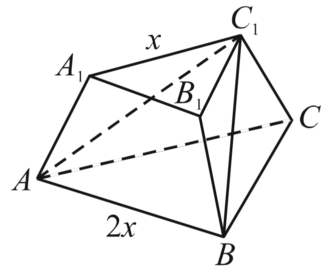
$\Rightarrow V = \frac{4}{3}(64+4+16) = 112$ cm^3.

Дизайнерът трябва да избере $h = 4$ cm. Ако избере $h = 3$ cm, обемът ще бъде по-голям с 12 cm^3.

6. а) $V = \frac{h}{3}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \sqrt{\frac{a^2\sqrt{3}}{4} . \frac{b^2\sqrt{3}}{4}}\right) = \frac{h\sqrt{3}}{12}(a^2 + b^2 + ab)$.

б) $V = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + \sqrt{a^2 b^2}) = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + ab)$.

7. Нека пресечената пирамида има $AB = 2x$, $A_1B_1 = x$ и височина h.



а) Нека равнината минава през точките A, B, C_1.

Тялото „под” равнината е триъгълна пирамида с обем $V_{ABCC_1} = \frac{1}{3}.\frac{4x^2\sqrt{3}}{4}.h = \frac{4\sqrt{3}x^2h}{12}$.

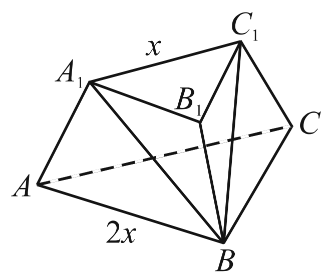
Обемът на пресечената пирамида е $V = \frac{7\sqrt{3}x^2h}{12}$ $\Rightarrow$ обемът на тялото „над” равнината е $\frac{7\sqrt{3}x^2h}{12} - \frac{4\sqrt{3}x^2h}{12} = \frac{3\sqrt{3}x^2h}{12}$.

Търсеното отношение е $\frac{4}{3}$ или $\frac{3}{4}$.

б) Нека равнината минава през точките A_1, C_1, B. Постъпваме, както в подусловие а).

$V_{A_1C_1B_1B} = \frac{x^2h\sqrt{3}}{12}$ $\Rightarrow$ обемът на тялото „над” равнината е

$\frac{7\sqrt{3}x^2h}{12} - \frac{\sqrt{3}x^2h}{12} = \frac{6\sqrt{3}x^2h}{12}$.



Търсеното отношение е $6:1$ или $1:6$.

8. $h=\sqrt{2}$, $l=\sqrt{14}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{h}{l}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. Отговор **А)**.

9. $h^2=k^2-\dfrac{(a-b)^2}{12}$ $\Rightarrow$ $(a-b)^2=36$, $a-b=6$ $(a-b>0)$.

$V=\dfrac{h\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+ab)$ $\Rightarrow$

$39\sqrt{2}.12=\sqrt{6}\sqrt{3}(a^2+b^2-2ab+3ab)$, откъдето намираме $ab=40$.

От равенствата $a-b=6$ и $ab=40$ получаваме, че $a=10$, $b=4$. Отговор **А)**.

10. От равенството $k^2=h^2+\dfrac{(a-b)^2}{12}$ намираме $(a-b)^2=36$.

$\Rightarrow$ $l=\sqrt{h^2+\dfrac{(a-b)^2}{3}}=\sqrt{15}$. Отговор **В)**.

12. Нека лицето на основата на дадената пирамида е B, височината е h, тогава обемът е $V=\dfrac{Bh}{3}$.

Сечението е многоъгълник, подобен на основата с коефициент $1:2$ и следователно лицето на сечението е $B_1=\dfrac{B}{4}$.

За обема на пресечената пирамида получаваме $V_1=\dfrac{\frac{h}{2}}{3}(B+B_1+\sqrt{BB_1})=\dfrac{7hB}{24}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{7}{8}$. Отговор **Г)**.

3.7. Построяване на сечение на многостен с равнина

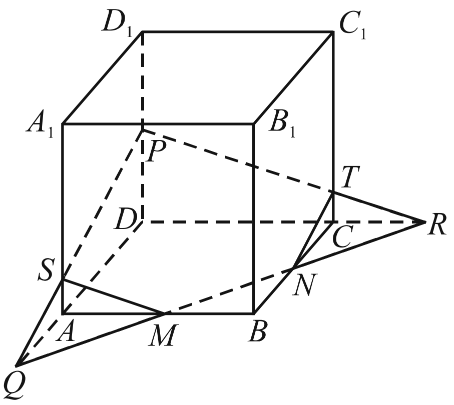
6. Решението следва решението на задача 1 по метода на пресечниците.

а) В равнината (ABC) $MN \cap AD = Q$ и $MN \cap DC = R$.

В равнината (ADD_1) $PQ \cap AA_1 = S$.

В равнината (CDD_1) $PR \cap CC_1 = T$.

Търсеното сечение е петоъгълникът $MNTPS$.



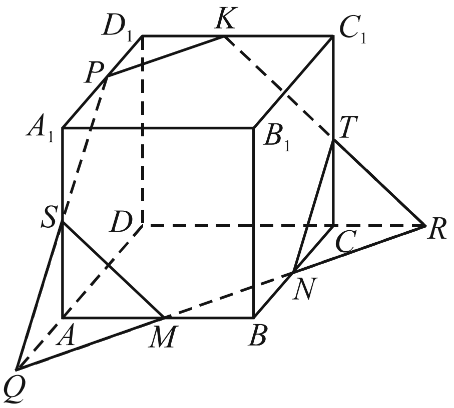
б) Точките Q, R и S построяваме, както в а).

Равнините (ABC) и ($A_1B_1C_1$) са успоредни $\Rightarrow$ пресечниците им с равнината на сечението ще бъдат успоредни прави. Построяваме права m през точка P и успоредна на $MN \Rightarrow m$ ще лежи в равнината ($A_1B_1C_1$) и в равнината на сечението. Нека $m \cap D_1C_1 = K$.

В равнината (DCC_1) $KR \cap CC_1 = T$.

Търсеното сечение е шестоъгълникът $MNTKPS$. Ще докажем, че той е правилен.

Точките M, N и P са средите на ръбовете, върху които лежат.



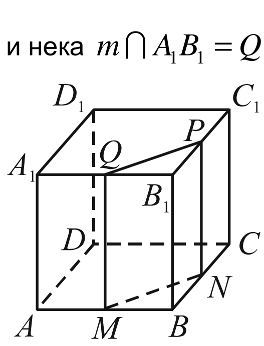
Лесно се вижда, че и K, S и T са средите на ръбовете, на които лежат. Следователно всяка страна на шестоъгълника има дължина $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (a е ръбът на куба).

Остава да докажем, че и всички ъгли на шестоъгълника са равни.

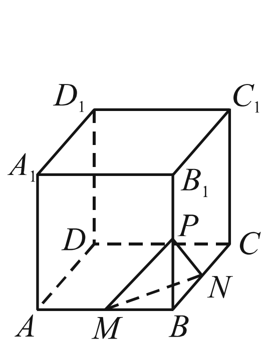
Триъгълниците MCT, NC_1K, TD_1P, KA_1S, PAM и SBN са еднакви $\Rightarrow$ $MT = NK = TP = KS = PM = SN$ $\Rightarrow$ $\Delta MNT \cong \Delta NTK \cong \Delta TKP \cong \Delta KPS \cong \Delta PSM \cong \Delta SMN$ $\Rightarrow$ ъглите на шестоъгълника са равни.

в) Както в б), през P построяваме права $m \parallel MN$ и нека $m \cap A_1B_1 = Q$.

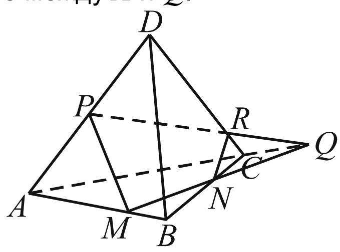
Сечението е правоъгълникът $MNPQ$.



г) Сечението е равностранният ΔMNP.



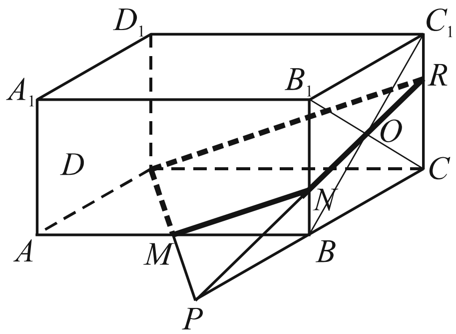
7. В равнината (ABC) $MN \cap AC = Q$, $CN < BN$ и $BM < AM$ $\Rightarrow$ C е между A и Q.



В равнината (ACD) $PQ \cap DC = R$.

Сечението е четириъгълникът $MNRP$.

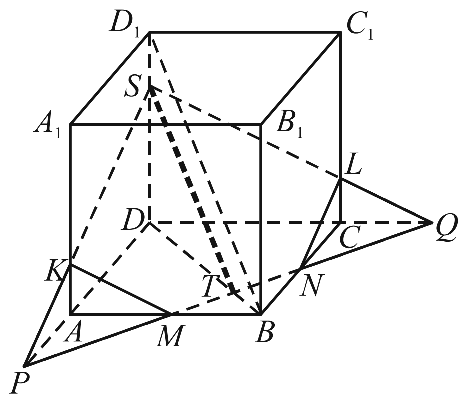
8. В равнината (ABC) $DM \cap BC = P$.



В равнината BCC_1 $OP \cap BB_1 = N$ и $OP \cap CC_1 = R$.

Сечението е четириъгълникът $DMQR$, който е трапец с основи $MN \parallel DR$ и бедра $DM \nparallel RN$.

9. В равнината (ABC) $MN \cap AD = P$ и $MN \cap DC = Q$.



Нека $MN \cap BD = T$.

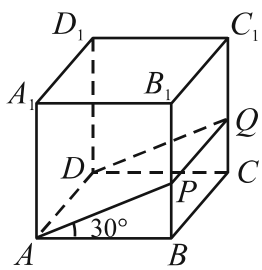
През точка T (която е от сечението) в равнината (DBD_1) построяваме права m, успоредна на BD_1. Равнината на сечението е успоредна на $BD_1 \Rightarrow m$ ще лежи в сечението и нека $m \cap DD_1 = S$.

В равнината (ADD_1) $SP \cap AA_1 = K$.

В равнината (DCC_1) $SQ \cap CC_1 = L$.

Сечението е петоъгълникът $MNLSK$.

10. Нека равнината минава през основния ръб AD.



а) Равнината на сечението пресича стената BCC_1B_1 в права PQ, която е успоредна на AD ($P \in BB_1$, $Q \in CC_1$).

Пресечниците на сечението с успоредните равнини (ABB_1) и (DCC_1) са успоредни $\Rightarrow$ $AP \parallel DQ$.

Сечението е успоредникът $APQD$ и тъй като $AD \perp (ABB_1)$, сечението е правоъгълник.

б) Пресечницата на сечението и основата е AD и тъй като равнината (ABB_1) е перпендикулярна на AD, то $\angle BAP = 30°$.

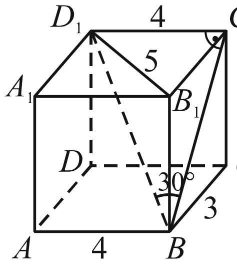
Тялото „под” сечението е триъгълна призма с основи ΔABP и ΔDCQ.

Нека ръбът на куба е $a \Rightarrow$ диагоналът $d = a\sqrt{3} = 6$ $\Rightarrow$ $a = 2\sqrt{3}$ cm.

От ΔABP: $BP = AB\text{tg}30° = 2$ cm. $\Rightarrow V_{ABPDCQ} = \dfrac{AB.BP}{2}.BC = 12$ cm^3.

Обемът на куба е $a^3 = 24\sqrt{3}$ cm^3. Тогава обемът на тялото „над” равнината е $V = 24\sqrt{3} - 12 = 12(2\sqrt{3} - 1)$ cm^3.

11. Нека $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm.



Проекцията на BD_1 в равнината (BCC_1) е $BC_1 \Rightarrow \angle D_1BC_1 = 30°$.

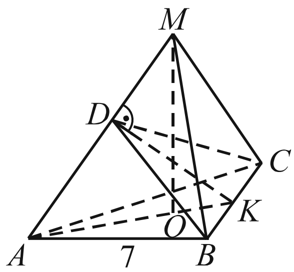
От правоъгълния ΔBC_1D_1 намираме $BC_1 = D_1C_1\text{cotg}30° = 4\sqrt{3} \Rightarrow$ $CC_1 = \sqrt{39}$ cm $\Rightarrow V = 12\sqrt{39}$ cm^3.

От правоъгълния ΔABD $BD = 5$ cm $\Rightarrow S_{DBB_1D_1} = 5\sqrt{39}$ cm^2.

Сечението, което минава през двата малки срещуположни ръба, е правоъгълникът BCD_1A_1.

От ΔABA_1: $BA_1 = \sqrt{39+16} = \sqrt{55}$ cm $\Rightarrow S_{BCD_1A_1} = 3\sqrt{55}$ cm^2.

12. Нека сечението минава през основния ръб BC и е перпендикулярно на ръба AM и го пресича в точка D.



От еднаквостта на триъгълниците ABD и ACD следва, че $BD = CD$ и, ако K е средата на BC, то $DK \perp BC$ и $AK \perp BC$.

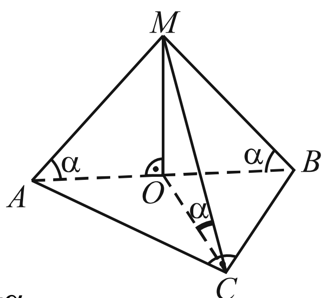
В равностранния ΔABC $AO = \frac{2}{3}.\frac{7\sqrt{3}}{2} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ cm.

От ΔAOM: $AM = \sqrt{\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 28^2} = \frac{49\sqrt{3}}{3}$ cm.

От подобието на правоъгълните триъгълници ADK и AOM имаме $\frac{DK}{MO} = \frac{AK}{AM}$, $DK = 6$ cm.

$\Rightarrow S_{BCD} = \frac{6.7}{2} = 21$ cm^2.

13. Нека в ΔABC $\angle ACB = 90°$, $BC = a$ и $AC = b$.

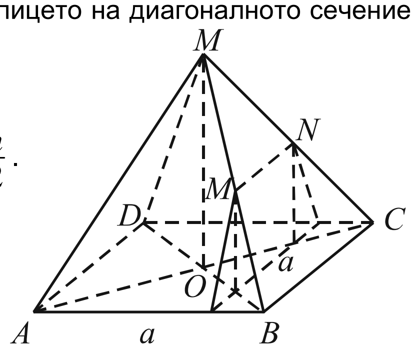


Околните ръбове сключват равни ъгли с равнината на основата, следователно те са равни и проекцията O на върха M е центърът на описаната окръжност около $\Delta ABC \Rightarrow O$ е средата на хипотенузата AB

$\Rightarrow \angle BAM = \angle ABM = \angle OCM = \alpha$ и $OC = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

От ΔMOC: $\text{tg}\alpha = \frac{MO}{OC} \Rightarrow MO = \frac{\sqrt{a^2+b^2}\text{tg}\alpha}{2}$. $\Rightarrow V = \frac{ab\sqrt{a^2+b^2}\text{tg}\alpha}{12}$.

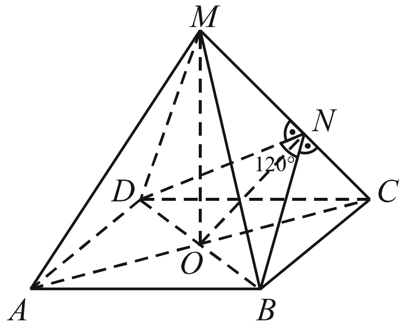
14. Нека основният ръб на пирамидата е a и височината ѝ е $h \Rightarrow$ лицето на диагоналното сечение е $Q = \frac{a\sqrt{2}.h}{2} \Rightarrow ah = Q\sqrt{2}$.



Сечението е равнобедрен трапец с основи a и $\frac{a}{2}$ и височина $\frac{h}{2}$.

$\Rightarrow S = \frac{(a+\frac{a}{2})\frac{h}{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}Q}{8}$.

15. Нека сечението през диагонала BD на основата и перпендикулярно на MC пресича MC в точка N. Тъй като MC е ръбът на двустенния ъгъл между околните стени BCM и DCM, то $\angle BND = 120°$.



Триъгълниците BCN и DCN са еднакви $\Rightarrow$ $BN = DN$ $\Rightarrow$ ΔDBN е равнобедрен с ъгъл $120°$ срещу основата BD и O е средата на BD.

Нека $AB = a$. Последователно намираме

$BO = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ cm $\Rightarrow$ $NO = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$ cm и $BN = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$ cm.

Лицето на диагоналното сечение е $\dfrac{BD.NO}{2}$. От друга страна по условие това лице е $6\sqrt{3}$ cm^2.

Така получаваме равенството $\dfrac{BD.NO}{2} = 6\sqrt{3}$, $\dfrac{1}{2}.a\sqrt{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{6} = 6\sqrt{3}$ $\Rightarrow a = 6$ cm $\Rightarrow$ $BN = \dfrac{6\sqrt{6}}{3}$ cm, $NO = \sqrt{6}$ cm и $CO = BO = 3\sqrt{2}$ cm.

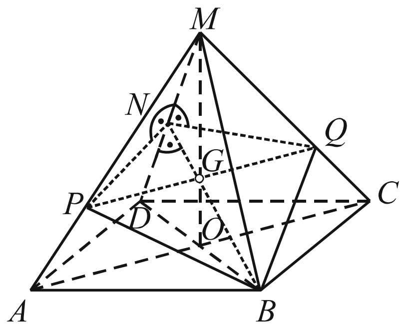
От ΔBCN намираме $NC = \sqrt{BC^2 - BN^2} = 2\sqrt{3}$ cm.

От $\Delta MOC \sim \Delta ONC$ получаваме $\dfrac{MO}{NO} = \dfrac{OC}{NC}$ $\Rightarrow$ $MO = \dfrac{NO.OC}{NC} = 3$ cm.

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}a^2.MO = 36$ cm^3.

16. По условие $\angle MAC = \angle MCA = \angle MBD = \angle MDB = 60°$ $\Rightarrow \Delta ACM$ и ΔDBM са равностранни.

Ще построим сечението, чието лице се търси, а именно сечението през върха B и перпендикулярно на околния ръб DM.



Нека в равностранния ΔDBM височините MO и BN ($N \in DM$) се пресичат в точка G, която е и медицентър.

В ΔACM точката G също е медицентър. През G построяваме права, успоредна на AC, която пресича AM и CM съответно в точки P и Q. Имаме $DM \perp AC$ (по теоремата за трите перпендикуляра) $\Rightarrow$ $DM \perp PQ$.

По построение имаме $DM \perp BN$ $\Rightarrow$ $DM \perp PBQN$ и значи $PBQN$ е търсеното сечение.

Остава да намерим лицето на сечението.

Проекцията на правата BN в равнината на основата е правата BD, която е перпендикулярна на AC и според теоремата за трите перпендикуляра, $BN \perp AC$ и тъй като $PQ \parallel AC$, то $BN \perp PQ$.

Получихме, че диагоналите на сечението са перпендикулярни $\Rightarrow$ лицето S му е $S = \dfrac{PQ.BN}{2}$.

От равностранния ΔDBM със страна $a\sqrt{2}$ намираме $BN = \dfrac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{6}}{2}$.

В ΔACM PQ минава през медицентъра $G \Rightarrow$ $PQ = \dfrac{2}{3}AC = \dfrac{2a\sqrt{2}}{3}$.

$\Rightarrow S = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{6}}{2}.\dfrac{2a\sqrt{2}}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$.

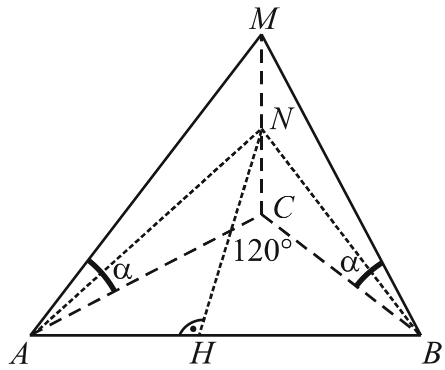
17. Нека $AC = BC = a$, $\angle ACB = 120°$ и N е средата на CM.

$\Rightarrow MC \perp (ABC)$ и $\angle MAC = \angle MBC = \alpha$.

От еднаквостта на триъгълниците CAN и CBN имаме $AN = BN$ $\Rightarrow$ сечението е равнобедреният ΔABN.

От правоъгълния ΔBMC намираме катета $MC = a\,\mathrm{tg}\alpha$ и медианата BN: $BN^2 = a^2 + \dfrac{a^2\mathrm{tg}^2\alpha}{4}$.

От ΔABC намираме $AB = a\sqrt{3}$.



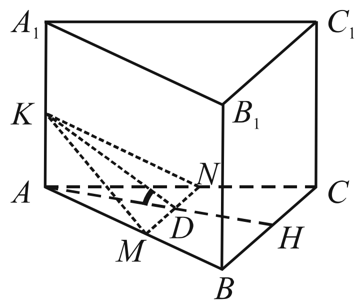
Нека NH е височина в ΔABN $\Rightarrow$ H е средата на AB и $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

От ΔHBN намираме $NH = \sqrt{BN^2 - BH^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{4\cos^2\alpha}} = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$ ($\cos\alpha > 0$).

$\Rightarrow S_{ABN} = \dfrac{AB.NH}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$.

18. Нека M и N са средите съответно на AB и AC $\Rightarrow$ $MN \parallel BC$ $\Rightarrow$ $\alpha \parallel BC$. Тогава пресечницата на α с (BCC_1) ще бъде успоредна , както на MN, така и на BC. Следователно α ще пресича и двете прави BB_1 и CC_1 в точки, които са едновременно вътрешни или външни за отсечките BB_1 и CC_1 $\Rightarrow \alpha$ не може да пресича само един от ръбовете BB_1 и CC_1 , следователно α ще пресича ръба AA_1 и нека $\alpha \cap AA_1 = K$. По условие $AK : KA_1 = 2:3$.

Сечението е равнобедреният ΔMNK.



Нека височината AH в ΔABC пресича MN в точка D $\Rightarrow$ $AD \perp MN$ и съгласно теоремата за трите перпендикуляра, $KD \perp MN$ и $\angle ADK = 60°$ е линейният ъгъл между α и (ABC).

От равностранния ΔABC намираме

$S_{AMN} = \dfrac{1}{4} S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$.

Сега, като използваме теоремата за лицето на проекцията на сечение, имаме

$S_{\text{проекцията}} = S_{\text{сечението}} \cos 60°$, получаваме $S_{AMN} = S_{MNK} . \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $S_{MNK} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

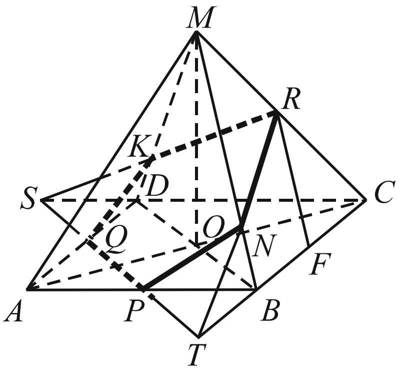
Лицето на околната повърхнина на призмата е $S = 3a.AA_1$ и тъй като $AA_1 = \dfrac{5}{2} AK$, остава да намерим AK.

Използвайки формулата за лицето на ΔMNK имаме $\dfrac{KD.MN}{2} = S_{MNK}$ $\Rightarrow$ $KD = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

От ΔADK: $AK = KD \sin 60° = \dfrac{3a}{4}$ $\Rightarrow$ $AA_1 = \dfrac{5}{2} AK = \dfrac{15a}{8}$.

$\Rightarrow S = 3a.\dfrac{15a}{8} = \dfrac{45a^2}{8}$.

19. Нека P, Q и R са средите съответно на ръбовете AB, AD и MC и нека α е равнината на сечението.



В равнината (ABC) $PQ \cap BC = T$ и $PQ \cap DC = S$.

В равнината (BCM) $TR \cap MB = N$.

В равнината (DCM) $RS \cap DM = K$.

Сечението е петоъгълникът $PNRKQ$.

Да означим с a и h съответно основния ръб и височината на дадената пирамида и нека T_1 е тялото „под" α, а T_2 е тялото „над" α.

Обемът на T_1 ще намерим, като от обема на пирамидата $STCR$ извадим обемите на пирамидите $PTBN$ и $SQDK$.

Пирамидата $STCR$ има за основа правоъгълния ΔSTC с катети $TC = SC = \dfrac{3a}{2}$ и височина на пирамидата $\dfrac{h}{2}$ (от ΔOCM) $\Rightarrow V_{STCR} = \dfrac{3a^2h}{16}$.

Пирамидата $PTBN$ има за основа правоъгълния ΔPTB с катети $TB = PB = \dfrac{a}{2}$ и височина на пирамидата, равна на разстоянието от N до (ABC).

Нека F е средата на $BC \Rightarrow RF$ е средна отсечка в ΔBCM $\Rightarrow RF = \dfrac{1}{2}BM$.

Също така BN е средна отсечка в ΔTFR $\Rightarrow BN = \dfrac{1}{2}RF = \dfrac{1}{4}BM$.

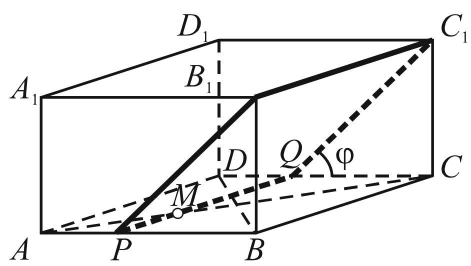
Тогава височината през N е $\dfrac{h}{4}$ (от ΔOBM) $\Rightarrow V_{PTBN} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{2}\dfrac{a}{2}\dfrac{a}{2}.\dfrac{h}{4} = \dfrac{a^2h}{96}$.

По същия начин намираме, че $V_{SQDK} = \dfrac{a^2h}{96}$.

$\Rightarrow V_{T_1} = \dfrac{3a^2h}{16} - 2.\dfrac{a^2h}{96} = \dfrac{a^2h}{6}$.

Обемът на дадената пирамида е $V = V_{ABCDM} = \dfrac{a^2h}{3}$ $\Rightarrow$ $V_{T_1} = \dfrac{1}{2}V$ $\Rightarrow V_{T_1} : V_{T_2} = 1:1$.

20. Нека $(B_1C_1M) = \alpha$. Пресечниците на α с успоредните равнини (ABC) и $(A_1B_1C_1)$ са успоредни и ако $\alpha \cap (ABC) = m$, то $m \parallel B_1C_1$.



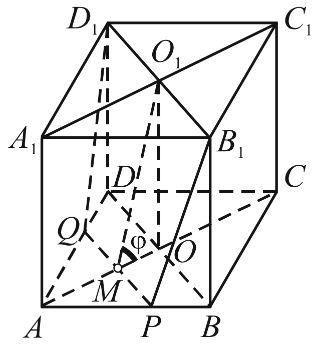
Нека $m \cap AB = P$ и $m \cap DC = Q$ $\Rightarrow$ $PQ \parallel B_1C_1$.

Сечението е правоъгълникът PB_1C_1Q.

Нека $AC \cap BD = O$ $\Rightarrow$ $AM = \dfrac{2}{3}AO = \dfrac{1}{3}AC$ $\Rightarrow$ $AP = \dfrac{a}{3}$ и $BP = \dfrac{2a}{3}$ (използвали сме теоремата на Талес).

От ΔPBB_1: $PB_1 = \sqrt{PB^2 + BB_1^{\,2}} = \dfrac{a\sqrt{13}}{3}$ $\Rightarrow$ $S_{\text{сечението}} = PQ.PB_1 = \dfrac{a^2\sqrt{13}}{3}$.

21. Нека $(B_1D_1M)=\alpha$. Пресечниците на α с успоредните равнини (ABC) и $(A_1B_1C_1)$ са успоредни и ако $\alpha\cap(ABC)=m$, то $m\parallel B_1D_1$.



Нека $m\cap AB=P$ и $m\cap AD=Q \Rightarrow PQ\parallel B_1C_1$.

M е медицентърът на $\Delta ABD \Rightarrow PQ=\frac{2}{3}BD=\frac{2}{3}B_1D_1=\frac{2\sqrt{2}a}{3}$ и $AP=AQ=\frac{2a}{3}$, $PB=QD=\frac{a}{3}$. Така получаваме, че $\Delta PBB_1\cong\Delta QDD_1$ $\Rightarrow PB_1=QD_1 \Rightarrow$ сечението е равнобедреният трапец B_1D_1QP с голяма основа B_1D_1.

От ΔMOO_1 намираме височината на трапеца $MO_1=\sqrt{MO^2+OO_1^2}=\frac{a\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}$.

Лицето на трапеца е $S=\frac{PQ+B_1D_1}{2}.MO_1=\frac{5\sqrt{19}a^2}{18}$.

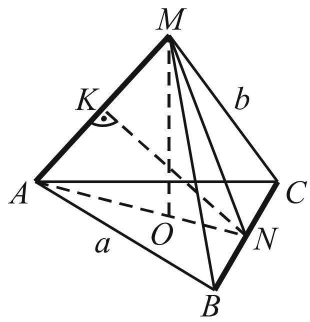
3.8. Ос на кръстосани прави

4. Нека N е средата на $BC \Rightarrow \ AN \perp BC$ и $MN \perp BC \ \Rightarrow (ANM) \perp BC$.

В ΔANM построяваме височината $NK \perp AM$, $K \in AM \ \Rightarrow NK$ е оста-отсечка на кръстосаните прави AM и BC.

От ΔAOM: $MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \dfrac{\sqrt{3b^2 - a^2}}{\sqrt{3}}$.

От ΔANM: $AM.NK = AN.MO \ \Rightarrow NK = \dfrac{MO.AN}{AM} = \dfrac{a\sqrt{3b^2 - a^2}}{2b}$.



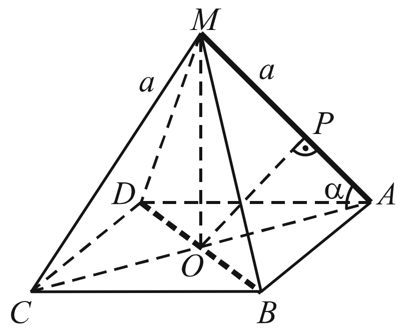
5. Равнината (AMC) съдържа правата AM и е перпендикулярна на BD – $(ACM) \perp BD$, защото $BD \perp AC$ и $BD \perp MO$.

Правата BD пробожда (AMC) в точка O. От точка O в равнината (AMC) спускаме перпендикуляр към AM: $OP \perp AM$, $P \in AM \ \Rightarrow \ OP$ е оста-отсечка.

Проекцията на AM е $AO \ \Rightarrow \ \angle OAM = \alpha$.

От ΔAOM: $AO = a\cos\alpha$.

От ΔAOP: $OP = a\sin\alpha\cos\alpha$.



6. Равнината (DCM) съдържа правата MC и е успоредна на AB (защото $AB \parallel DC$).

Тогава разстоянието между кръстосаните прави AB и MC е равно на разстоянието от точка от AB до равнината (DCM).

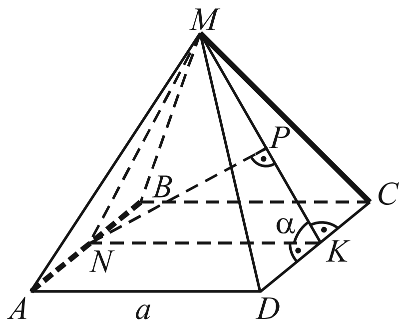
Нека N и K са средите съответно на AB и DC.

В ΔNKM построяваме $NP \perp MK$ ($P \in MK$). Но $NP \perp DC$ по теоремата за трите перпендикуляра (проекцията на NP е $NK \perp DC$) $\Rightarrow \ NP \perp (DCM)$.

Получихме, че дължината на NP е равна на разстоянието между кръстосаните прави AB и MC (но NP не е оста-отсечка).

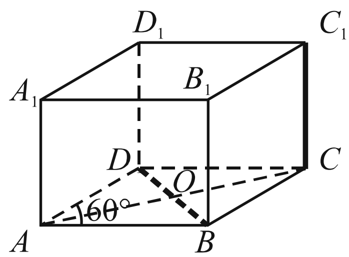
Тъй като $NK \perp DC$ и $MK \perp DC$, то $\angle NKM = \alpha$.

От ΔNKP: $NP = a\sin\alpha$.



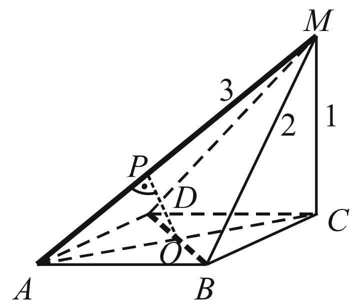
7. Нека $AC \cap BD = O$. Тогава $OC \perp BD$ и $OC \perp CC_1$ ($CC_1 \perp (ABC)$) $\Rightarrow OC$ е оста-отсечка.

От равностранния ΔDBC: $OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.



8. Равнината (ACM) съдържа правата AM и $(ACM) \perp BD$.

Нека $AC \cap BD = O$. От точка O в равнината (ACM) спускаме перпендикуляр към AM: $OP \perp AM$, $P \in AM$. Следователно OP е оста-отсечка на BD и AM.



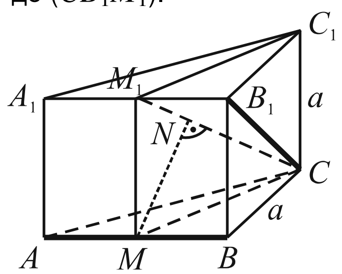
От ΔACM: $AC = 2\sqrt{2} \Rightarrow AO = \sqrt{2}$.

От подобието на ΔAOP и ΔAMC имаме $\dfrac{OP}{MC} = \dfrac{AO}{AM} \Rightarrow$

$OP = \dfrac{MC.AO}{AM} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$.

9. Нека M и M_1 са средите съответно на AB и A_1B_1. Тогава равнината $(CB_1M_1) \parallel AB$ и (CB_1M_1) съдържа CB_1. Следователно трябва да намерим разстоянието от AB до (CB_1M_1).

Нека $MN \perp CM_1$ (в ΔMCM_1). Имаме:



$AB \perp MM_1$ и $AB \perp CM \Rightarrow AB \perp (MCC_1M_1) \Rightarrow$ $M_1B_1 \perp (MCC_1M_1)$.

От $MN \subset (MCC_1M_1) \Rightarrow AB \perp MN$. (1)

Също така $M_1B_1 \perp MN$.

По построение $MN \perp CM_1 \Rightarrow MN \perp (CB_1M_1) \Rightarrow MN \perp CB_1$. (2)

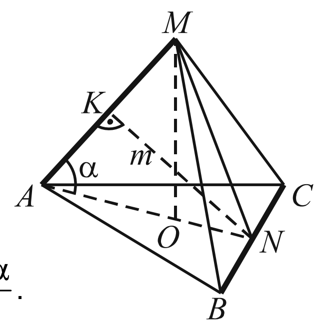
От (1) и (2) следва, че MN е търсеното разстояние.

От правоъгълния ΔCC_1M_1 намираме $CM_1 = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

От ΔMCM_1: $MN.CM_1 = MM_1.CM \Rightarrow MN = \dfrac{MM_1.CM}{CM_1} = \dfrac{a\sqrt{21}}{7}$.

10. Както в задача 4 намираме, че разстоянието между BC и AM е $NK = m$ и $\angle NAM = \alpha \Rightarrow$

$AN = \dfrac{m}{\sin\alpha}$.



Ако страната на ΔABC е a, то $AN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \dfrac{m}{\sin\alpha} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

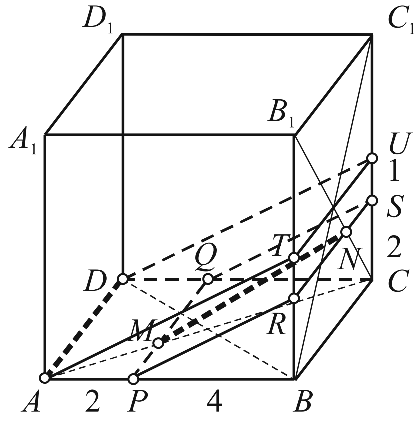
$a = \dfrac{2\sqrt{3}m}{3\sin\alpha}$.

От ΔABC: $AO = \dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ и от ΔAOM: $MO = AO\,\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}\mathrm{tg}\alpha}{3}$.

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.\dfrac{a\sqrt{3}\mathrm{tg}\alpha}{3} = \dfrac{2m^3\sqrt{3}}{27\cos\alpha\sin^2\alpha}$.

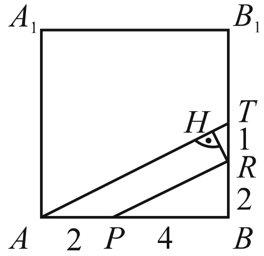
11. През точка M построяваме права PQ, така че $PQ \parallel AD$ ($P \in AB$, $Q \in DC$).

През точка N построяваме права RS, така че $RS \parallel AD$ ($R \in BB_1$, $S \in CC_1$) $\Rightarrow$ $RS \parallel PQ$ $\Rightarrow$ правите RS и PQ определят една равнина $\alpha = (PRSQ)$, която съдържа MN.



Построяваме точки T и U съответно върху BB_1 и CC_1, така че $AT \parallel PR \parallel DU$ $\Rightarrow$ $ATUD$ е правоъгълник, който определя равнина $\beta = (ATUD)$, която съдържа AD.

Получихме, че равнините $\alpha = (PRSQ)$ и $\beta = (ATUD)$ съдържат съответно кръстосаните прави MN и AD и са успоредни (съдържат двойка пресичащи се прави съответно успоредни – $AT \parallel PR$ и $AD \mid PQ$). Следователно разстоянието между тази двойка равнини е равно на разстоянието между кръстосаните прави MN и AD.



Нека $RH \perp AT$ ($H \in AT$). Тъй като AT е пресечницата на перпендикулярните равнини α и (ABB_1A_1) и понеже $RH \subset (ABB_1A_1)$, то $RH \perp \alpha$.

Следователно RH е разстоянието между α и β.

Точка M е медицентърът на $\Delta ABD \Rightarrow$ $AP = \dfrac{1}{3}AB = 2$ и $BP = 4$. Аналогично $BR = 2$.

Имаме $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{TR}{BR} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $TR = 1$.

От подобието на триъгълниците HRT и BPR получаваме $\dfrac{HR}{PB} = \dfrac{TR}{PR}$ $\Rightarrow$ $HR = \dfrac{PB.TR}{PR} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.