2. Аналитична геометрия в равнината – решения на задачите

2.1. Уравнение на права

2. б) $\vec{p}(-B,A)=\vec{p}(1,3) \;\Rightarrow\; A=3\;,\; B=-1 \;\Rightarrow\; g:3x-y+C=0$.
$M(1,3)\in g \;\Rightarrow\; C=0 \;\Rightarrow\; g:3x-y=0$.

в) $\vec{p}(-B,A)=\vec{p}(2,1) \;\Rightarrow\; A=1,\; B=-2 \Rightarrow g: x-2y+C=0$.
$M(1,1)\in g \;\Rightarrow\; C=1 \;\Rightarrow\; g: x-2y+1=0$.

г) $\vec{p}(-B,A)=\vec{p}(3,0) \;\Rightarrow\; A=0\;,\; B=-3 \;\Rightarrow\; g: -3y+C=0$.
$M(2,1)\in g \;\Rightarrow\; C=3 \;\Rightarrow\; g: -3y+3=0$ или $y=1$.

д) $\vec{p}(-B,A)=\vec{p}(0,2) \;\Rightarrow\; A=2\;,\; B=0 \;\Rightarrow\; g: 2x+C=0$.
$M(3,1)\in g \;\Rightarrow\; C=-6 \;\Rightarrow\; g: 2x-6=0$ или $g: x=3$.

6. а) $\overrightarrow{p}(-3,2) \;\Rightarrow\; A=2,\; B=3 \;\Rightarrow\; g:\; 2x+3y+C=0$
$M(1,0)\in g \;\Rightarrow\; C=-2,\; g: 2x+3y-2=0$.

б) $\overrightarrow{p}(3,\frac{1}{2}) \;\Rightarrow\; A=\frac{1}{2}\;,\; B=-3\;,\; g:\frac{1}{2}x-3y+C=0$.
$M(1,2)\in g \;\Rightarrow\; C=\frac{11}{2}\;,\; g: \frac{1}{2}x-3y+\frac{11}{2}=0$ или $g: x-6y+11=0$.

в) $\overrightarrow{p}(4,0),\;\Rightarrow\; A=0\;,\; B=-4 \;\Rightarrow\; g: -4y+C=0$.
$M(3,2)\in g \;\Rightarrow\; C=8 \;\Rightarrow\; g: -4y+8=0,$ или $g:\; y=2$

г) $\overrightarrow{p}(0,2),\;\Rightarrow\; A=2\;,\; B=0 \;\Rightarrow\; g: 2x+C=0$.
$M(-1,1)\in g \;\Rightarrow\; C=2 \;\Rightarrow\; g: 2x+2=0,$ или $g: x=-1$

д) $\vec{p}(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}),\;\Rightarrow\; A=-\frac{1}{4},\; B=\frac{1}{2}\;,\; g: -\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y+C=0$.
$M(2,1)\in g \;\Rightarrow\; C=0,\; g: -\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y=0$ или $g:\; x-2y=0$.

е) $\vec{p}(2,-5),\;\Rightarrow\; A=-5\;,\; B=-2 \;\Rightarrow g:\; -5x-2y+C=0$.
$M(-2,5)\in g \;\Rightarrow\; C=0,\; g:\; 5x+2y=0$.

7. а) $g:\dfrac{x-3}{1-3}=\dfrac{y+4}{2+4}$, $g:3x+y-5=0$.

б) $g:\dfrac{x+2}{3+2}=\dfrac{y-1}{3-1}$, $г:2x-5y+9=0$

в) Абсцисите на двете точки са равни $x_1=x_2=-4 \Rightarrow g:x=-4$.

г) Ординатите на двете точки са равни $y_1=y_2=3 \Rightarrow g:y=3$

д) $g:\dfrac{x-5}{0-5}=\dfrac{y-0}{2-0}$, $g:2x+5y-10=0$.

е) $g:\dfrac{x-0}{3-0}=\dfrac{y+3}{0+3}$, $g:x-y-3=0$.

8. а) $k=-3 \Rightarrow y=-3x+b$. От условието, че токата $A(1,2)$ лежи на правата, намираме $b=5$ $\Rightarrow y=-3x+5$.

б) $k=\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=\dfrac{1}{2}x+b$, От условието, че токата $A(0,2)$ лежи на правата, намираме $b=2$ $\Rightarrow .\ y=\dfrac{1}{2}x+2$.

в) $k=-\dfrac{2}{3} \Rightarrow y=-\dfrac{2}{3}x+b$. От условието, че токата $A(3,2)$ лежи на правата, намираме $b=4 \Rightarrow y=-\dfrac{2}{3}x+4$.

г) $k=5 \Rightarrow y=5x+b$ От условието, че токата $A(3,3)$ лежи на правата, намираме $b=-12$ $\Rightarrow y=5x-12$.

д) $k=-4 \Rightarrow y=-4x+b$. От условието, че токата $A(-1,-1)$ лежи на правата, намираме $b=-5 \Rightarrow y=-4x-5$..

9. а) $\varphi=30°$, $k=\operatorname{tg}30°=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+b$. От условието, че токата $A(\sqrt{3},-2)$ лежи на правата, намираме $b=-3 \Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x-3$, общото уравнение на правата е $\sqrt{3}x-3y-9=0$.

б) $\varphi=45°$, $k=\operatorname{tg}45°=1 \Rightarrow y=x+b$. От условието, че токата $A(1,-2)$ лежи на правата, намираме $b=-3 \Rightarrow$ общото уравнение на правата е $x-y-3=0$.

в) $\varphi = 60°$, $k = \text{tg}60° = \sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $y = \sqrt{3}x + b$. От условието, че точката $A(-3,1)$ лежи на правата, намираме $b = 1 + 3\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ общото уравнение на правата е $\sqrt{3}x - y + 3\sqrt{3} + 1 = 0$.

г) $\varphi = 120°$, $k = \text{tg}120° = -\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $y = -\sqrt{3}x + b$. От условието, че точката $A(2,2)$ лежи на правата, намираме $b = 2 + 2\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ общото уравнение на правата е $\sqrt{3}x + y - 2(1+\sqrt{3}) = 0$.

д) $\varphi = 135°$, $h = \text{tg}135° = -1$ $\Rightarrow$ $y = -x + b$. От условието, че точката $A(-2,1)$ лежи на правата, намираме $b = -1$ $\Rightarrow$ общото уравнение на правата е $x + y + 1 = 0$.

е) $\varphi = 150°$, $k = \text{tg}150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$ $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x + b$. От условието, че точката $A(1,1)$ лежи на правата, намираме $b = 1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\Rightarrow$ общото уравнение на правата е $\sqrt{3}x + 3y - 3 - \sqrt{3} = 0$.

ж) $\varphi = 0°$, $k = \text{tg } 0° = 0$ $\Rightarrow$ $y = b$. От условието, че точката $A(3,-3)$ лежи на правата, намираме $b = -3$ $\Rightarrow$ общото уравнение на правата е $y = -3$.

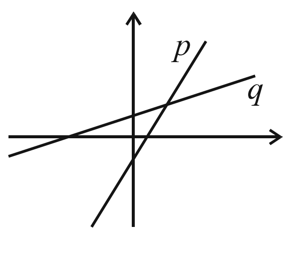
10. Декартовото уравнение на правата е $y = \dfrac{5x}{8} - \dfrac{1}{4}$, В.

11. Общото уравнение на тази права е $3x - y - 1 = 0$, Б.

12. Уравнението на правата е $\dfrac{x-2}{4-2} = \dfrac{y+3}{5+3}$, А.

13. Уравнението на правата е $\dfrac{x-5}{6-5} = \dfrac{y-1}{3-1}$, $2x - y - 9 = 0$, Г.

17. Нека B е пресечната точка на правите и проекцията ѝ върху Ox е точка A. Нека правите p и q пресичат Ox съответно в точките M и N и сключват с положителната посока на абсцисната ос съответно ъгли α и β. От чертежа имаме $AM < AN$ $\Rightarrow$ $\dfrac{BA}{AM} > \dfrac{BA}{AN}$ $\Rightarrow$ $\text{tg}\,\alpha > \text{tg}\,\beta$ $\Rightarrow$ $a > c$. А.



19. Декартовото равнение на правата е $\dfrac{x-3}{-5-3} = \dfrac{y-10}{2-10}$, $y = x + 7$ $\Rightarrow$ $\text{tg}\varphi = 1$, $\varphi = 45°$. Б.

20. Само правата BC сключва тъп ъгъл с положителната посока на Ox $\Rightarrow$ нейният ъглов коефициент е най-малък. Ъгловите коефициенти на правите CD и AC сравняваме, както в задача 17. Б.

21. Само ъгловият коефициент на правата от В) е положителен $\Rightarrow$ само тази права сключва остър ъгъл с положителната посока на Ox.

2.2. Взаимно положение на две прави

4. а) Решаваме системата $\begin{vmatrix} 2x-y+7=0 \\ 4x+y+1=0 \end{vmatrix}$ и получаваме, че правите се пресичат в точката $\left(-\frac{4}{3}, \frac{13}{3}\right)$. За ъгъла φ между правите получаваме $\cos\varphi = \frac{8-1}{\sqrt{4+1}\sqrt{16+1}} = \frac{7\sqrt{85}}{85}$.

б) Решаваме системата $\begin{vmatrix} 6x+3y-1=0 \\ x=2y \end{vmatrix}$ и получаваме, че правите се пресичат в точката $\left(\frac{2}{15}, \frac{1}{15}\right)$. За ъгъла φ между правите получаваме $\cos\varphi = \frac{6-6}{\sqrt{36+9}\sqrt{1+4}} = 0 \Rightarrow$ правите са перпендикулярни.

Перпендикулярността на правите може да установим и с ъгловите им коефициенти: $k_1 = -2$, $k_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow k_1.k_2 = -1 \Rightarrow$ правите са перпендикулярни.

в) Образуваме системата $\begin{vmatrix} 2x-3y=17 \\ y=\frac{2}{3}x+1 \end{vmatrix}$, $k_1 = k_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow$ правите са успоредни.

г) Решаваме системата $\begin{vmatrix} 4x+y-1=0 \\ y=\frac{4}{3}x+1 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 4x+y-1=0 \\ 4x-3y+3=0 \end{vmatrix}$ и получаваме, че правите се пресичат в точката $(0,1)$. За ъгъла φ между правите получаваме $\cos\varphi = \frac{16-3}{\sqrt{16+1}\sqrt{16+9}} = \frac{13\sqrt{17}}{85}$.

5. а) $g_1: \ 2x-3y+1=0$, $k_1 = \frac{2}{3}$. Правата g е перпендикулярна на $g_1 \Rightarrow k\,k_1 = -1$, $k = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ $g: y = -\frac{3}{2}x + b$. От условието g да минава през точка $A(2,1)$ намираме $b=4 \Rightarrow$ $g: y = -\frac{3}{2}x+4$ или $3x+2y-8=0$.

б) $g_1: \ x-y+3=0$, $k_1 = 1$. Правата g е перпендикулярна на $g_1 \Rightarrow k\,k_1 = -1$, $k=-1 \Rightarrow$ $g: y = -x+b$. От условието g да минава през точка $A(1,3)$ намираме $b=4 \Rightarrow$ $g: y=-x+4$ или $x+y-4=0$.

в) $g_1: \ -4x+5y+10=0$, $k_1=\frac{4}{5}$. Правата g е перпендикулярна на $g_1 \Rightarrow \ k\,k_1=-1$, $k=-\frac{5}{4}$

$\Rightarrow \ g: y=-\frac{5}{4}x+b$. От условието g да минава през точка $A\left(\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right)$ намираме $b=\frac{1}{2} \ \Rightarrow$

$g: y=-\frac{5}{4}x+\frac{1}{2}$ или $5x+4y-2=0$.

г) $g_1: \ x-4y+11=0$, $k_1=\frac{1}{4}$. Правата g е перпендикулярна на $g_1 \Rightarrow \ k\,k_1=-1$, $k=-4 \ \Rightarrow$

$g: y=-4x+b$. От условието g да минава през точка $A\left(\frac{1}{2},3\right)$ намираме $b=5 \ \Rightarrow$

$g: y=-4x+5$ или $4x+y-5=0$.

д) $g_1: \ 2x+y-2=0$, $k_1=-2$. Правата g е перпендикулярна на $g_1 \Rightarrow \ k\,k_1=-1$, $k=\frac{1}{2} \ \Rightarrow$

$g: y=\frac{1}{2}x+b$. От условието g да минава през точка $A(-3,-2)$ намираме $b=-\frac{1}{2} \ \Rightarrow$

$g: y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ или $x-2y-1=0$.

6. а) $g_1: \ 3x+4y-5=0$. Правите са успоредни $\Rightarrow$ коефициентите им пред x и y са пропорционални числа $\Rightarrow \ g: 3x+4y+C=0$. От условието g да минава през точка $A(1,1)$ намираме $C=-7 \ \Rightarrow \ g: 3x+4y-7=0$.

б) $g_1: \ -2x+y+3=0$. Правите са успоредни $\Rightarrow$ коефициентите им пред x и y са пропорционални числа $\Rightarrow \ g: -2x+y+C=0$. От условието g да минава през точка $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$ намираме $C=\frac{3}{2} \ \Rightarrow \ g: -2x+y+\frac{3}{2}=0$, $-4x+2y+3=0$.

в) $g_1: \ 2x-\frac{1}{2}y+2=0$. Правите са успоредни $\Rightarrow$ коефициентите им пред x и y са пропорционални числа $\Rightarrow \ g: 4x-y+C=0$. От условието g да минава през точка $A(1,2)$ намираме $C=-2 \ \Rightarrow \ g: 4x-y-2=0$.

7. Да означим с g_1 правата, която е перпендикулярна на g и минава през A, а точката, в която g и g_1 се пресичат – с B.

а) $g:\ x-3y+2=0 \ \Rightarrow\ g_1:\ 3x+y+C=0$. От условието g_1 да минава през точка $A(1,2)$ намираме $C=-5$ или $g_1:\ 3x+y-5=0$.

Координатите на точка B са решенията на системата $\begin{vmatrix} x-3y+2=0 \\ 3x+y-5=0 \end{vmatrix} \ \Rightarrow\ B(1,3;\ 1,1)$.

Търсеното разстояние е $AB=\sqrt{(1,3-1)^2+(1,1-2)^2}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.

б) $g:\ 2x-2y+1=0 \ \Rightarrow\ g_1: 2x+2y+C=0$. От условието g_1 да минава през точка $A(-1,1)$ намираме $C=0$ или $g_1:\ 2x+2y=0$.

Координатите на точка B са решенията на системата $\begin{vmatrix} 2x-2y+1=0 \\ 2x+2y=0 \end{vmatrix} \ \Rightarrow\ B(-\frac{1}{4};\frac{1}{4})$.

Търсеното разстояние е $AB=\sqrt{(-\frac{1}{4}+1)^2+(\frac{1}{4}-1)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

в) $g:\ x+3y-2=0,\ \ g_1: -3x+y+C=0$. От условието g_1 да минава през точка $A(2,3)$ намираме $C=3$ или $g_1:\ 3x-y-3=0$.

Координатите на точка B са решенията на системата $\begin{vmatrix} x+3y-2=0 \\ 3x-y-3=0 \end{vmatrix} \ \Rightarrow\ B(1,1;\ 0,3)$.

Търсеното разстояние е $AB=\sqrt{(1,1-2)^2+(0,3-3)^2}=\dfrac{9\sqrt{10}}{10}$.

8. За дадените прави съответно намираме: $k_a=2$, $k_b=-2$, $k_c=-\frac{1}{2}$, $k_d=-\frac{1}{2}$. Сравнявайки ъгловите коефициенти намираме $k_c=k_d \ \Rightarrow\ c \parallel d$; $k_a k_c=-1 \ \Rightarrow\ a\perp c$, $k_a k_d=-1 \ \Rightarrow$ $a\perp d$. Отговор Б.

9 Нека $A\in q$, $q\perp p$ и $q\cap p=B$.

а) $p: 4x-3y+15=0 \ \Rightarrow\ q: 3x+4y+C=0$. От условието $A\in q$ и $A(1;-2)$ намираме $C=5 \ \Rightarrow\ q: 3x+4y+5=0$.

Решаваме системата $\begin{vmatrix} 4x-3y+15=0 \\ 3x+4y+5=0 \end{vmatrix}$ и намираме $B(-3,1)$.

Разстоянието е $AB=\sqrt{(-3-1)^2+(1+2)^2}=5$

б) $p: 9x + 3y - 30 = 0$, $p:\ 3x + y - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad q: -x + 3y + C = 0$. От условието $A \in q$ и $A(-2; -4)$ намираме $C = 10 \quad \Rightarrow \quad q: x - 3y - 10 = 0$.

Решаваме системата $\left| \begin{array}{l} 3x + y - 10 = 0 \\ x - 3y - 10 = 0 \end{array} \right.$ и намираме $B(4, -2)$.

Разстоянието е $AB = \sqrt{(4+2)^2 + (-2+4)^2} = 2\sqrt{10}$.

11. Да означим с a дадената права и с b правата, която минава през точка $A(-1,5; 2)$ и е успоредна на a.

а) $5x - 6y + 7 = 0$. Правите a и b имат съответно пропорционални коефициенти пред x и $y \Rightarrow$ $b:\ 5x - 6y + C = 0$ и от учловието, че b минава през A намираме $C = \dfrac{39}{2} \Rightarrow$ $b:\ 5x - 6y + \dfrac{39}{2} = 0$, $\quad b:\ 10x - 12y + 39 = 0$.

б) $3x - 2y + 2 = 0$. Правите a и b имат съответно пропорционални коефициенти пред x и $y \Rightarrow$ $b:\ 3x - 2y + C = 0$ и от учловието, че b минава през A намираме $C = \dfrac{17}{2} \Rightarrow$ $b:\ 6x - 4y + 17 = 0$.

12. Намираме пресечната точка A на правите $3x + 3y - 5 = 0$ и $2x - 3y - 25 = 0$, като решим системата $\left| \begin{array}{l} 3x + 3y - 5 = 0 \\ 2x - 3y - 25 = 0 \end{array} \right.$. $\Rightarrow \quad A(6, -\dfrac{13}{3})$

а) Нека правата p минава през точката A и е успоредна на правата $7x - 5y - 2 = 0 \Rightarrow$ $p:\ 7x - 5y + C = 0$. Тъй като p минава през точка A, то $C = -\dfrac{191}{3} \Rightarrow$ $p:\ 21x - 15y - 191 = 0$

б) Уравнението на оста Ox е $y = 0 \quad \Rightarrow$ уравнението на правата е $y + C = 0$. Тъй като $A(6, -\dfrac{13}{3})$ лежи на правата, то $C = \dfrac{13}{3} \Rightarrow$ правата е $y = -\dfrac{13}{3}$ или $3y + 13 = 0$.

в) Уравнението на оста Oy е $x = 0 \quad \Rightarrow$ уравнението на правата е $x + C = 0$. Тъй като $A(6, -\dfrac{13}{3})$ лежи на правата, то $C = -6 \Rightarrow$ правата е $x = 6$ или $x - 6 = 0$.

2.3. Приложение на векторите и аналитичната геометрия за решаване на триъгълник

2. а) $G\left(\frac{2+8+5}{3},\frac{1+1+2}{3}\right)$, $G\left(5,\frac{4}{3}\right)$.

б) $M_a\left(\frac{8+5}{2},\frac{1+2}{2}\right)$, $M_a\left(\frac{13}{2},\frac{3}{2}\right)$;

$M_b\left(\frac{2+5}{2},\frac{1+2}{2}\right)$, $M_b\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$;

$M_c\left(\frac{2+8}{2},\frac{1+1}{2}\right)$, $M_c(5,1)$.

в) $a=BC:\ \frac{x-8}{5-8}=\frac{y-1}{2-1}$, $x+3y-11=0$;

$b=AC:\ \frac{x-2}{5-2}=\frac{y-1}{2-1}$, $x-3y+1=0$;

$c=AB,\ \ y_1=y_2\ \Rightarrow\ c:\ y=1$.

г) $m_a:\ \frac{x-2}{\frac{13}{2}-2}=\frac{y-1}{\frac{3}{2}-1}$, $x-9y+7=0$;

$m_b:\ \frac{x-8}{\frac{7}{2}-8}=\frac{y-1}{\frac{3}{2}-1}$, $x+9y-17=0$;

$m_c:\ x=5$.

д) $h_a:\ -3x+y+C=0$ и минава през точка $A(2;1)\ \Rightarrow\ C=5\ \Rightarrow\ h_a:\ 3x-y-5=0$.

$h_b:\ 3x+y+C=0$ и минава през точка $B(8;1)\ \Rightarrow\ C=-25\ \Rightarrow\ h_b:\ 3x+y-25=0$.

$h_c:\ -x+C=0$ и минава през точка $C(5;2)\ \Rightarrow\ h_c:\ x=5$

е) $H_a:\ \left|\begin{array}{l}x+3y-11=0\\3x-y-5=0\end{array}\right.$, $H_a\left(\frac{13}{5},\frac{14}{5}\right)$;

$H_b:\ \left|\begin{array}{l}x-3y+1=0\\3x+y-25=0\end{array}\right.$, $H_b\left(\frac{37}{5},\frac{14}{5}\right)$;

$H_c:\ \left|\begin{array}{l}y=1\\x=5\end{array}\right.$, $H_c(5,1)$.

ж) $AB=\sqrt{(8-2)^2+(1-1)^2}=6$,

$BC=\sqrt{(8-5)^2+(1-2)^2}=\sqrt{10}$,

$AC=\sqrt{(5-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{10}$. $\Rightarrow\ P_{ABC}=6+2\sqrt{10}$.

з) $C(5;2)$ и $H_c(5,1)\ \Rightarrow |h_c|=|CH_c|=1\ \Rightarrow\ S_{ABC}=\frac{c\ h_c}{2}=\frac{6.1}{2}=3$.

3. Нека успоредникът е $ABCD$. Тъй като $\kappa_a = -\frac{8}{3} \neq k_b = -2$, то дадените прави не са успоредни и нека $AB:\ 8x+3y+1=0$, $AD:\ 2x+y-1=0$ и $d:\ 3x+2y+3=0$.

Координатите на точка A намираме, като решения на системата $\begin{vmatrix} 8x+3y+1=0 \\ 2x+y-1=0 \end{vmatrix}$, $A(-2,5)$.

Координатите на A не удовлетворяват уравнението на диагонала $d \Rightarrow A \notin d \Rightarrow d = BD$. Тогава $B:\begin{vmatrix} AB:\ 8x+3y+1=0 \\ d:\ 3x+2y+3=0 \end{vmatrix}$, $B(1,-3)$ и $D:\begin{vmatrix} AD:\ 2x+y-1=0 \\ d:\ 3x+2y+3=0 \end{vmatrix}$, $D(5,-9)$.

Нека O е пресечната точка на диагоналите на успоредника. Координатите на C ще намерим, като използваме, че O е средата на отсечката BD: $O\left(\frac{1+5}{2}, \frac{-3-9}{2}\right)$, $O(3,-6)$.

Точка O е средата и на отсечката AC и нека $C(x,y) \Rightarrow \frac{x-2}{2}=3$, $x=8$ и $\frac{y+5}{2}=-6$, $y=-17 \Rightarrow C(8,-17)$.

4. Нека успоредникът е $ABCD$. Тъй като $\kappa_a = \frac{1}{2} \neq k_b = 1$, то дадените прави не са успоредни и нека $AB:\ x-2y+8=0$ и $AD:\ x+y-7=0$. Координатите на точка A намираме, като решения на системата $\begin{vmatrix} x-2y+8=0 \\ x+y-7=0 \end{vmatrix}$, $A(2,5)$.

Нека $C(x,y)$ и тъй като $F(-2,6)$ е средата на AC, намираме $C(-6,7)$.

$BC \parallel AD \Rightarrow BC:\ x+y+m=0$ и от условието, че BC минава през точка $C(-6,7)$ намираме $m=-1 \Rightarrow BC:\ x+y-1=0$.

По същия намираме уравнението на DC: $DC \parallel AB$ и минава през точка $C \Rightarrow DC:\ x-2y+20=0$.

5. Нека ромбът е $ABCD$ и нека $d = AC:\ y = x - 4$ и $AB:\ 3y - x - 6 = 0$. Тогава координатите на точка A са решенията на системата $\begin{vmatrix} 3y - x - 6 = 0 \\ y = x - 4 \end{vmatrix} \Rightarrow A(9,5)$.

Нека $C(x, y)$ и тъй като $M(5,1)$ е средата на AC намираме $C(1,-3)$.

Уравнението на диагонала BD намираме, като използваме, че е перпендикулярен на $AC:\ x - y - 4 = 0$ и минава през точка $M \Rightarrow BD:\ x + y + m = 0$, $m = -6 \Rightarrow BD:\ x + y - 6 = 0$.

$B = AB \cap BD: \begin{vmatrix} 3y - x - 6 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{vmatrix}$, $B(3,3)$.

Нека $D(x, y)$ и тъй като $M(5,1)$ е средата на BD намираме $D(7,-1)$.

6. Нека ромбът е $ABCD$ и O е пресечната точка на диагоналите му.

Дадените прави са успоредни и нека $AB:\ 5x - 2y + 1 = 0$, $CD:\ 5x - 2y + 34 = 0$, $AC:\ 3x + y - 6 = 0$.

Намираме координатите на точките A и C и уравнението на AC:

$A: \begin{vmatrix} 5x - 2y + 1 = 0 \\ 3x + y - 6 = 0 \end{vmatrix}$, $A(1,3)$; $C: \begin{vmatrix} 5x - 2y + 34 = 0 \\ 3x + y - 6 = 0 \end{vmatrix}$, $C(-2,12) \Rightarrow AC:\ 3x + y - 6 = 0$.

Координатите на средата O на AC са $O\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{15}{2}\right)$.

Правата BD е перпендикулярна на AC и минава през точка $O \Rightarrow BD:\ x - 3y + 23 = 0$.

За координатите на върховете B и D последователно намираме:

$B = AB \cap BD: \begin{vmatrix} 5x - 2y + 1 = 0 \\ x - 3y + 23 = 0 \end{vmatrix}$, $B\left(\dfrac{43}{13}, \dfrac{114}{13}\right)$,

$D = CD \cap BD: \begin{vmatrix} 5x - 2y + 34 = 0 \\ x - 3y + 23 = 0 \end{vmatrix}$, $D\left(-\dfrac{56}{13}, \dfrac{81}{13}\right)$.

7. Нека $M(x_M, y_M)$ е средата на дадената отсечка $\Rightarrow x_M = -2$. От условието $M \in p$ намираме $y_M = 3 \Rightarrow M(-2,3)$.

Нека търсената права е q, т.е. $q \perp p$ и $M \in q \Rightarrow q:\ 13x - 5y + 41 = 0$.

Върховете на триъгълника, образуван от координатните оси правата q имат координати $(0,0)$, $\left(-\dfrac{41}{13}, 0\right)$ и $\left(0, \dfrac{41}{5}\right) \Rightarrow S = \dfrac{1681}{130}$.

8. Правата CD е успоредна на AB и минава през точка $M \Rightarrow\ CD:\ 4x-3y+13=0$.

Нека M_1 е средата на AB. Тогава $MM_1 \perp AB$ и минава през $M(3,5;9)$ $\Rightarrow$ уравнението ѝ е $MM_1:\ 6x+8y-93=0$.

По условие правата AB има общо уравнение $4x-3y-12=0$.

$$M_1 = AB \cap MM_1 \Rightarrow M_1: \left| \begin{array}{l} 4x-3y-12=0 \\ 6x+8y-93=0 \end{array} \right. \Rightarrow\ M_1\left(\frac{15}{2},6\right).$$

Нека $A(x,y)$. Координатите на A намираме от условията $|AM_1|=\frac{5}{2}$ и $A \in AB$:

$A: \left| \begin{array}{l} \sqrt{\left(\frac{15}{2}-x\right)^2+(6-y)^2}=\frac{5}{2} \\ 4x-3y-12=0 \end{array} \right.$. От второто уравнение $y=\frac{4x}{3}-4$, заместваме в първото и след преобразувания получаваме $\sqrt{(10x-75)^2}=15$ или $|10x-75|=15$.

Корените на последното уравнение са 6 и 9 и съответните стойности за y са 4 и 8.

$\Rightarrow\ A(6,4)$ и $B(9,8)$, защото $|AM_1|=|BM_1|$.

Сега намираме уравнението на $AD: 3x+4y-34=0$ и $BC:\ 3x+4y-59=0$.

9. Дадените прави са успоредни, т.е. търсим разстоянието между две успоредни прави. Ще постъпим по следния начин: избираме произволна точка A от a и намираме разстоянието от A до b.

Избираме $A(0,3) \in a$. Нека $B \in b$ и $AB \perp b \Rightarrow\ AB:\ x-y+3=0$.

$$B = b \cap AB: \left| \begin{array}{l} x+y+5=0 \\ x-y+3=0 \end{array} \right.,\ B(-4,-1).$$

$\Rightarrow\ AB = 4\sqrt{2}$

2.4. Нормално уравнение на окръжност

3. Нека търсената окръжност има уравнение $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$, където $C(\alpha,\beta)$ и R са съответно центърът и радиусът на окръжността.

а) Заместваме координатите на дадените точки в уравнението на окръжността и получаваме системата:

$$\left|\begin{array}{l}(-1-\alpha)^2+(-2-\beta)^2=R^2\\(-2-\alpha)^2+(-1-\beta)^2=R^2\\(-2-\alpha)^2+(-2-\beta)^2=R^2\end{array}\right. .$$

Решенията на системата са $\alpha=-\dfrac{3}{2}$, $\beta=-\dfrac{3}{2}$, $R^2=\dfrac{1}{2}$.

Уравнението на окръжността е $(2x+3)^2+(2y+3)^2=2$.

б) Заместваме координатите на дадените точки в уравнението на окръжността и получаваме системата:

$$\left|\begin{array}{l}(-2-\alpha)^2+(-3-\beta)^2=R^2\\(-3-\alpha)^2+(-3-\beta)^2=R^2\\(-2-\alpha)^2+(-1-\beta)^2=R^2\end{array}\right. .$$

Решенията на системата са $\alpha=-\dfrac{5}{2}$, $\beta=-2$, $R^2=\dfrac{5}{4}$.

Уравнението на окръжността е $(2x+5)^2+(2y+4)^2=5$.

в) Заместваме координатите на дадените точки в уравнението на окръжността и получаваме системата:

$$\left|\begin{array}{l}(2-\alpha)^2+(-2-\beta)^2=R^2\\(-2-\alpha)^2+(2-\beta)^2=R^2\\(-2-\alpha)^2+(-2-\beta)^2=R^2\end{array}\right. .$$

Решенията на системата са $\alpha=0$, $\beta=0$, $R^2=8$.

Уравнението на окръжността е $x^2+y^2=8$.

5. Нека търсената окръжност има уравнение $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$, където $C(\alpha,\beta)$ и R са съответно центърът и радиусът на окръжността.

Заместваме координатите на дадените точки в уравнението на окръжността и получаваме системата:

$$\left|\begin{array}{l}(1-\alpha)^2+(2-\beta)^2=R^2\\\alpha^2+(1-\beta)^2=R^2\\(1-\alpha)^2+\beta^2=R^2\end{array}\right. .$$

Решенията на системата са $\alpha=1$, $\beta=1$, $R^2=1$.

Уравнението на окръжността е $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

б) Решаваме системата $\left|\begin{array}{l}(x-1)^2+(y-1)^2=1\\ x=0\end{array}\right.$, която има единствено решение $(0,1)$.

Следователно окръжността и оста Oy имат единствена обща точка и Oy е допирателна към окръжността..

Аналогично намираме, че окръжността и оста Ox имат единствена обща точка $(1,0)$.

Геометрично решение. Задачата е: Дадена е окръжност с център $C(1,1)$ и радиус $R=1$. Да се намери взаимното положение на координатните оси и окръжността.

Нека $CA\perp Ox$, $A\in Ox$ и $CB\perp Oy$, $B\in Oy$. Тъй като $C(1,1)$, то $OA=OB=AC=BC=1 \Rightarrow AC=1=R \Rightarrow A$ лежи на окръжността. Получихме, че Ox е перпендикулярна на радиуса AC в точката $A\Rightarrow Ox$ е допирателна към окръжността в точка A и A е единствената има обща точка.

Аналогично Oy е допирателна към окръжността в точката B.

6. В уравнението на окръжността отделяме точен квадрат за x и y: $x^2+2x+1+y^2-3y+\frac{9}{4}-1-\frac{9}{4}-7=0 \Leftrightarrow (x+1)^2+(y-\frac{3}{2})^2=\frac{41}{4} \Rightarrow$ координатите на центъра са $(-1,\frac{3}{2})$ и дължината на радиуса е $\frac{\sqrt{41}}{2}$.

7. Нека търсената окръжност има уравнение $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$, където $C(\alpha,\beta)$ и R са съответно центърът и радиусът на окръжността.

Решаваме системата $\left|\begin{array}{l}(2-\alpha)^2+(2-\beta)^2=R^2\\ (-5-\alpha)^2+(-5-\beta)^2=R^2\\ (1-\alpha)^2+(-5-\beta)^2=R^2\end{array}\right.$, $\alpha=-2$, $\beta=-1$, $R^2=25$.

Уравнението на окръжността е $(x+2)^2+(y+1)^2=25$.

8. Нека k е търсената окръжност. Тя е концентрична с дадената, следователно имат един и същ център $(3,-2)\Rightarrow$ уравнението е $k:\ (x-3)^2+(y+2)^2=R^2$.

Радиуса намираме от условието, че $A(4;-1)$ лежи на k, $R^2=2$.

$\Rightarrow\ k:\ (x-3)^2+(y+2)^2=2$.

9. Записваме нормалното уравнение на дадената окръжност, като отделим точни квадрати за x и за y: $(x+\frac{3}{2})^2+(y-2)^2=\frac{29}{4}$

Дадената окръжност и k са концентрични, следователно имат един и същ център $\Rightarrow$

$k:\ (x+\frac{3}{2})^2+(y-2)^2=R^2$.

Радиуса намираме от условието k да минава през точка $A(-3;4)$: $R^2=\frac{25}{4}$.

$\Rightarrow k:\ (x+\frac{3}{2})^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$.

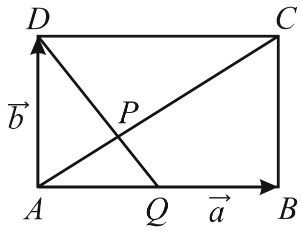
б) Уравнението на оста Oy е $x=0$.

При $x=0$ уравнението $(0+\frac{3}{2})^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$ има два корена $y_1=0$ и $y_2=4$.

Координатите на точките N и P са $(0,0)$ и $(0,4)$.

Проект № 1
Разлагане на вектор като линейна комбинация на векторите от базата

Решение.



1) Нека $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

За база в равнината избираме векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Очевидно това е една ортогонална база.

2) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}$.

$\overrightarrow{DQ}=-\vec{b}+\frac{\vec{a}}{2}=\frac{\vec{a}}{2}-\vec{b}$.

3) $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AC}=x\vec{a}+x\vec{b}$. (1)

4) $\overrightarrow{DP}=y\overrightarrow{DQ}=\frac{y}{2}\vec{a}-y\vec{b}$.

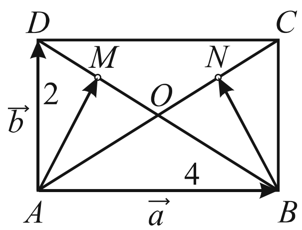
5) $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\vec{b}+\frac{y}{2}\vec{a}-y\vec{b}=\frac{y}{2}\vec{a}+(1-y)\vec{b}$. (2)

6) От (1) и (2) получаваме системата $\left|\begin{array}{l} x=\frac{y}{2} \\ x=1-y \end{array}\right.$, откъдето $y=\frac{2}{3}$ и $x=\frac{1}{3}$.

Тогава $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$.

Проект № 2
Приложение на скаларното произведение

Решение.



1) Нека $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

За база в равнината избираме векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Очевидно това е една ортогонална база.

Според условието $|\vec{a}|=4$ и $|\vec{b}|=2$.

Имаме $\vec{a}^2=16$, $\vec{b}^2=4$ и $\vec{a}\vec{b}=0$.

2) $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DM}=\vec{b}+\frac{1}{4}(-\vec{b}+\vec{a})=\frac{1}{4}(\vec{a}+3\vec{b})$.

$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=-\vec{a}+\frac{3}{4}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{4}(-\vec{a}+3\vec{b})$.

3) $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{\left(\frac{1}{4}(\vec{a}+3\vec{b})\right)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{\vec{a}^2+6\vec{a}\vec{b}+9\vec{b}^2}=\frac{1}{4}\sqrt{(16+9.4)}=\frac{1}{4}\sqrt{4.13}=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

$|\overrightarrow{BN}|=\sqrt{\left(\frac{1}{4}(-\vec{a}+3\vec{b})\right)}=\frac{1}{4}\sqrt{\vec{a}^2-6\vec{a}\vec{b}+9\vec{b}^2}=\frac{1}{4}\sqrt{(16+9.4)}=\frac{1}{4}\sqrt{4.13}=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

4) $\overrightarrow{AM}\,\overrightarrow{BN}=\frac{1}{4}(\vec{a}+3\vec{b}).\frac{1}{4}(-\vec{a}+3\vec{b})=\frac{1}{16}(9\vec{b}^2-\vec{a}^2)=\frac{1}{16}(36-16)=\frac{5}{4}$.

$$\cos\angle(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BN})=\frac{\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{13}}{2}.\frac{\sqrt{13}}{2}}=\frac{5}{13}.$$

Проект № 3
Уравнение на права

Решение.

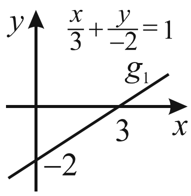
1)

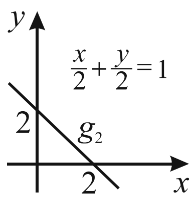
g_1: $\frac{x}{3}+\frac{y}{-2}=1$

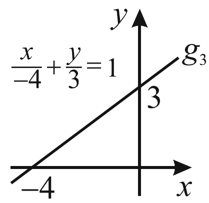
g_2: $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=1$

g_3: $\frac{x}{-4}+\frac{y}{3}=1$

2)







3) $\frac{x}{-3}+\frac{y}{4}=1$

4)

$\frac{x}{5}+\frac{y}{6}=1$ $(5,0)$ и $(0,6)$

$\frac{x}{7}+\frac{y}{-7}=1$ $(7,0)$ и $(0,-7)$

$\frac{x}{-3}+\frac{y}{-2}=1$ $(-3,0)$ и $(0,-2)$

$2x+3y=1$ $(\frac{1}{2},0)$ и $(0,\frac{1}{3})$

Проект № 5
Приложение на векторите в аналитичната геометрия

Нека $A(0,0)$, $B(0,4)$ и $D(0,2)$ $\Rightarrow$ $C(4,2)$, $Q(2,0)$

Намираме уравненията на правите AC и DQ:

$AC: x=2y$

$DQ: x+y-2=0$

Решаваме системата: $\left|\begin{array}{l} x=2y \\ x+y-2=0 \end{array}\right.$ и намираме координатите на точка $P(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$.

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AP}(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$ и $\overrightarrow{DP}(\frac{4}{3},-\frac{4}{3})$

$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$; $|\overrightarrow{DP}|=\frac{4\sqrt{2}}{3}$; $\overrightarrow{AP}\,\overrightarrow{DP}=\frac{16}{9}-\frac{8}{9}=\frac{8}{9}$.

$\Rightarrow \cos(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{DP})=\frac{\overrightarrow{AP}\,\overrightarrow{DP}}{|\overrightarrow{AP}|\,|\overrightarrow{DP}|}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.