1. Вектори и координати – решения на задачите

1.1. Линейна зависимост и независимост на вектори в равнината и в пространството

Задача 1. Решение.

А) Векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат на пресичащи се прави, следователно са линейно независими.

Нека точка D е такава, че четириъгълникът $ADBC$ е успоредник, тогава $\vec{c} = \overrightarrow{CD} = \vec{a} + \vec{b}$ (правило на успоредника).

Векторите $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$ са неколинеарни, като страна и диагонал на един успоредник, следователно са линейно независими.

В) $\vec{d} = \overrightarrow{BA} = \vec{a} - \vec{b}$ (правило на триъгълника), $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$ и тъй като $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CB}$ са неколинеарни, то $\vec{b}$ и $\vec{d}$ са линейно независими.

Г) Имаме $\vec{f} = \vec{c} + \vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{a} - \vec{b} = 2\vec{a}$, т.е. $\vec{f} = 2\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{a}$ и $\vec{f}$ са линейно зависими.

Задача 2. Решение.

От правилото на триъгълника имаме $\overrightarrow{AM} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$, $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}$ и $\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + \vec{b}$.

Тъй като P е средата на AB, то $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Точка G е медицентърът на $\Delta ABC \Rightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC}) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

Задача 5. Решение.

По условие $\vec{m} = \vec{a} - \lambda\vec{b}$, $\vec{n} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{m}$ и $\vec{n}$ са линейно зависими $\Rightarrow$ съществува число x, така че $\vec{m} = x\vec{n}$, откъдето

$$\vec{a} - \lambda\vec{b} = x(3\vec{a} + 2\vec{b})$$

$$(3x-1)\vec{a} + (2x+\lambda)\vec{b} = \vec{0}. \quad (1)$$

Тъй като $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са линейно независими, то коефициентите в линейната комбинация (1) са равни на 0 и получаваме системата $\left| \begin{array}{l} 3x-1=0 \\ 2x+\lambda=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}, \ \lambda = -\frac{2}{3}$.

Задача 6. Решение.

В равенството $\vec{u}-\vec{v}=\vec{a}$ заместваме $\vec{u}=x\vec{a}+2y\vec{b}$ и $\vec{v}=\vec{a}-3\vec{b}$.

Имаме:

$$x\vec{a}+2y\vec{b}-(\vec{a}-3\vec{b})=\vec{a}$$

$$(x-2)\vec{a}+(2y+3)\vec{b}=\vec{0}.$$

Получихме линейна комбинация на линейно независимите вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $\Rightarrow$ коефициентите в тази комбинация са нули, откъдето намираме $x=2$ и $y=-\dfrac{3}{2}$. Тогава $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}$.

Задача 7. Решение.

По условие $\vec{a}=\vec{f}-\alpha\vec{g}$, $\vec{b}=2\vec{g}$ и $\vec{c}=\beta\vec{f}+\alpha\vec{g}$. Трябва да е изпълнено $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$. В последното равенство заместваме $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ с равните им изрази. Получаваме:

$$\beta\vec{f}+\alpha\vec{g}=\vec{f}-\alpha\vec{g}-(2\vec{g})$$

$$(\beta-1)\vec{f}+(2\alpha+2)\vec{g}=\vec{0}$$

и от линейната независимост на $\vec{f}$ и $\vec{g}$ намираме $\beta=1$ и $\alpha=-1$. Тогава $\vec{a}=\vec{f}+\vec{g}$ и $\vec{c}=\vec{f}-\vec{g}$.

Задача 8. Решение.

Векторът $\vec{m}-\vec{n}$ е колинеарен с $\vec{b}$ $\Rightarrow$ съществува число z, така че

$$\vec{m}-\vec{n}=z\vec{b}$$

$$x\vec{a}+2\vec{b}-(\vec{a}-y\vec{c})=z\vec{b}$$

$$(x-1)\vec{a}+(2-z)\vec{b}+y\vec{c}=\vec{0}.$$

Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са линейно независими $\Rightarrow$ $\left|\begin{array}{l} x-1=0 \\ 2-z=0 \\ y=0 \end{array}\right.$, откъдето намираме $x=1$, $y=0$.

Задача 9. Решение.

По условие $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=3\vec{m}+4\vec{n}$ $\Leftrightarrow$ $x\vec{m}+\vec{n}-3\vec{p}+(\vec{m}+2y\vec{n})+(\vec{n}+z\vec{p})=3\vec{m}+4\vec{n}$ $\Leftrightarrow$ $(x-2)\vec{m}+(2y-2)\vec{n}+(z-3)\vec{p}=\vec{0}$. Векторите $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ са линейно независими $\Rightarrow$ $x=2$, $y=1$, $z=3$.

Задача 10. Решение.

В равенството $\vec{p}-\vec{q}=z\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ заместваме $\vec{p}$ и $\vec{q}$ с равните им изрази:

$$2\vec{a}-x\vec{c}-(y\vec{b})=z\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

$$(2-z)\vec{a}+(-y-1)\vec{b}+(-x-1)\vec{c}=\vec{0}.$$

Окончателно $x=-1$, $y=-1$, $z=2$.

1.2. Векторна база в равнината и в пространството

Задача 4. Решение.

а) В равенството $\overrightarrow{p}=\overrightarrow{m}+2\overrightarrow{n}$ заместваме векторите $\overrightarrow{m}$ и $\overrightarrow{n}$ с равните им изрази:

$$\overrightarrow{p}=\overrightarrow{m}+2\overrightarrow{n} = 2\vec{a}-3\vec{b}+2(\vec{a}+\vec{b}) = 4\vec{a}-\vec{b}.$$

б) $\vec{q}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}\overrightarrow{m}+\vec{n} = \frac{1}{2}\vec{a}-\frac{2}{3}(2\vec{a}-3\vec{b})+(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{1}{6}\vec{a}+3\vec{b}$.

в) $\vec{c}=-3\vec{a}-3(2\vec{a}-3\vec{b})-3(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b} = -12\vec{a}+7\vec{b}$.

Задача 5. Решение.

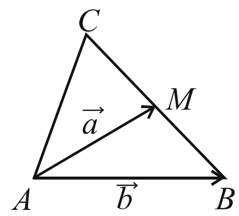
а) $\overrightarrow{m}+\vec{n} = \vec{a}+\vec{c}+2\vec{b} = \vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$,

б) $\overrightarrow{m}+\vec{n} = 3(\vec{a}-\vec{b})+(\vec{b}-2\vec{c}) = 3\vec{a}-2\vec{b}-2\vec{c}$

в) $\overrightarrow{m}+\vec{n} = \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+(-2\vec{c}-3\vec{a}) = -2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

г) $\overrightarrow{m}+\vec{n} = (-\vec{a}+\vec{b})(-2)+(-3\vec{a}-3\vec{c}+\vec{b}) = -\vec{a}-\vec{b}-3\vec{c}$.

Задача 6. Решение.



Като използваме правилото на триъгълника, последователно получаваме:

$\overrightarrow{BM} = -\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}-\vec{b}$.

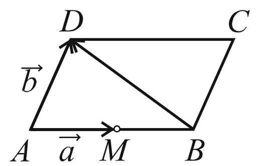
$\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{BM} = -\vec{a}+\vec{b}$.

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}=\vec{a}+\vec{a}-\vec{b}=2\vec{a}-\vec{b}$.

$\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{AC}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{a}-\vec{b}=3\vec{a}-2\vec{b}$.

$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AC}= -\vec{a}+\vec{b}-\vec{a}-6\vec{a}+3\vec{b}=-8\vec{a}+4\vec{b}$.

Задача 7. Решение.



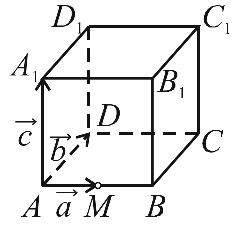
$\overrightarrow{AB}=2\vec{a}$.

$\overrightarrow{BD}=-2\vec{a}+\vec{b}$.

$\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}=2\vec{a}-2\vec{b}$.

$\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}=-2\vec{a}+\vec{b}-2\vec{a}-\vec{b}=4\vec{a}$.

Задача 8. Решение.



$\overrightarrow{AC}=2\vec{a}+\vec{b}$.

$\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}=2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

$\overrightarrow{BD}+2\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{BC}=-2\vec{a}+\vec{b}+2\vec{b}=-2\vec{a}+3\vec{b}$.

$\overrightarrow{D_1M}=\overrightarrow{D_1D}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}=-\vec{c}-\vec{b}+\vec{a}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$.

Задача 9. Решение.

Представяме вектора $\overrightarrow{m}$ като линейна комбинация на векторите от базата:

$\overrightarrow{m} = \vec{a} + \lambda(\vec{a} + \vec{c}) = (\lambda + 1)\vec{a} + \lambda\vec{c}$ и

$\overrightarrow{m} = \mu\vec{c} - 2\vec{a} + \vec{c} = -2\vec{a} + (1 + \mu)\vec{c}$.

Представянето на вектор, като линейна комбинация на векторите от базата е еднозначно, следователно коефициентите пред базисните вектори в двете представяния на $\overrightarrow{m}$ са равни, т.е.

$\left| \begin{array}{l} \lambda + 1 = -2 \\ \lambda = 1 + \mu \end{array} \right.$, откъдето $\lambda = -3$, $\mu = -4$ и $\vec{b} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{c} = -3\vec{a} - 4\vec{b}$. Отговор В.

Задача 10. Решение.

Коефициентите в двете представяния на вектора $\vec{u}$ като линейна комбинация на векторите от базата са равни, следователно $x = 2$, $y = -3$, $z = -1$ и $\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c}$.

1.3. Скаларно произведение на два вектора. Приложение

Задача 2. Решение.

	$\vec{a}$	$\vec{b}$
$\vec{a}$	4	3
$\vec{b}$	3	9

в) $3\vec{b}(\vec{a}+\vec{b}) = 3\vec{a}\vec{b}+3\vec{b}^2 = 3.3+3.9 = 36$.

д) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{a}-\vec{b}^2 = \vec{a}^2-\vec{b}^2 = 4-9=-5$.

е) $(\vec{a}-2\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}^2+\vec{a}\vec{b}-2\vec{a}\vec{b}-2\vec{b}^2 = 4+3-6-18=-17$.

Задача 6 Решение.

а) $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = 6.\frac{1}{3}.\cos 30° = 6.\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

б) $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = 2.4.\cos 45° = 8.\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

в) $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = 12.5.\frac{1}{2} = 30$.

г) $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{3}{2}.\frac{3}{4}.(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{16}$.

Задача 7. Решение.

а) $\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{2\sqrt{2}}{2.2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle(\vec{a},\vec{b}) = 45°$.

б) $\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} = \frac{-5}{3.2} = -\frac{5}{6}$, $\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = -\frac{5}{6}$.

Задача 8. Решение.

а) $\vec{u}\,\vec{v} = (-\vec{a}-\vec{b})\,(\vec{a}-3\vec{b}) = -\vec{a}^2+3\vec{a}\vec{b}-\vec{a}\vec{b}+3\vec{b}^2 = -1+0+0+3=2$.

$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{(-\vec{a}-\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2} = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$.

$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}^2} = \sqrt{(\vec{a}-3\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2-6\vec{a}\vec{b}+9\vec{b}^2} = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}$

$\cos\angle(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|u|\,|\vec{v}|} = \frac{2}{\sqrt{2}.\sqrt{10}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

б) $\vec{u}\,\vec{v} = (\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b})\,(-3\vec{a}-2\vec{b}) = -\overline{3\vec{a}}^2 - 2\vec{a}\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}\vec{b} - \vec{b}^2 = -3+0+0-1=-4$.

$|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u}^2} = \sqrt{(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2+\vec{a}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{b}^2} = \sqrt{1+0+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$|\vec{v}| = \sqrt{\vec{v}^2} = \sqrt{(-3\vec{a}-2\vec{b})^2} = \sqrt{9\vec{a}^2+12\vec{a}\vec{b}+4\vec{b}^2} = \sqrt{9+0+4} = \sqrt{13}$.

$\cos\angle(\vec{u},\vec{v}) = \frac{\vec{u}\vec{v}}{|u|\,|\vec{v}|} = \frac{-4}{\frac{\sqrt{5}}{2}.\sqrt{13}} = \frac{-8\sqrt{65}}{65}$.

в) $\vec{u}\vec{v}=(\frac{2}{3}\vec{a}-2\vec{b})(\frac{1}{3}\vec{a}+2\vec{b})=\frac{2}{9}\vec{a}^2+\frac{4}{3}\vec{a}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{a}\vec{b}-4\vec{b}^2=\frac{2}{9}+0+0-4=-\frac{34}{9}$.

$|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{(\frac{2}{3}\vec{a}-2\vec{b})^2}=\sqrt{\frac{4}{9}\vec{a}^2-\frac{8}{3}\vec{a}\vec{b}+4\vec{b}^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+0+4}=\frac{2\sqrt{10}}{3}$.

$|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}^2}=\sqrt{(\frac{1}{3}\vec{a}+2\vec{b})^2}=\sqrt{\frac{1}{9}\vec{a}^2+\frac{4}{3}\vec{a}\vec{b}+4\vec{b}^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+0+4}=\frac{\sqrt{37}}{3}$

$\cos\angle(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\vec{v}}{|u||\vec{v}|}=\frac{-34}{9.\frac{2\sqrt{10}}{3}.\frac{\sqrt{37}}{3}}=-\frac{17\sqrt{370}}{370}$.

Задача 9. Решение.

а) $\vec{u}\vec{v}=(\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c})(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})=$

$=2\vec{a}^2-\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2-\vec{b}\vec{c}+6\vec{a}\vec{c}-3\vec{b}\vec{c}+3\vec{c}^2=2+0+0+0+1+0+0+0+3=6$.

$|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+9\vec{c}^2-2\vec{a}\vec{b}+6\vec{a}\vec{c}-6\vec{b}\vec{c}}=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}$.

$|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}^2}=\sqrt{(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})^2}=\sqrt{4\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2-4\vec{a}\vec{b}+4\vec{a}\vec{c}-2\vec{b}\vec{c}}=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$.

$\cos\angle(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\vec{v}}{|u||\vec{v}|}=\frac{6\sqrt{11}.\sqrt{6}}{6.11}=\frac{\sqrt{66}}{11}$.

б) $\vec{u}\vec{v}=(\vec{b}-2\vec{c})(2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})=$

$=2\vec{a}\vec{b}+2\vec{b}^2-\vec{b}\vec{c}-4\vec{a}\vec{c}-4\vec{b}\vec{c}+2\vec{c}^2=0+2+0+0+0+2=4$.

$|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{(\vec{b}-2\vec{c})^2}=\sqrt{\vec{b}^2-4\vec{b}\vec{c}+4\vec{c}^2}=\sqrt{1+0+4}=\sqrt{5}$.

$|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}^2}=\sqrt{(2\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})^2}=\sqrt{4\vec{a}^2+4\vec{b}^2+\vec{c}^2+8\vec{a}\vec{b}-4\vec{a}\vec{c}-4\vec{b}\vec{c}}=\sqrt{4+4+1}=3$.

$\cos\angle(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\vec{v}}{|u||\vec{v}|}=\frac{4}{\sqrt{5}.3}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$.

Задача 10. Решение.

Определяме скаларните произведения на базисните вектори.

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	1	0	1
$\vec{b}$	0	1	0
$\vec{c}$	1	0	4

а) $\vec{u}\vec{v}=(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})=$

$=\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}-\vec{a}\vec{c}-\vec{a}\vec{b}-2\vec{b}^2+\vec{b}\vec{c}=1+0-1+0-2+0=-2$.

$|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}^2}=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{b}^2-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$.

$|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}^2}=\sqrt{(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c})^2}=$

$\sqrt{\vec{a}^2+4\vec{b}^2+\vec{c}^2+4\vec{a}\vec{b}-2\vec{a}\vec{c}-4\vec{b}\vec{c}}=\sqrt{1+4+4+0-2+0}=\sqrt{7}$.

$\cos\angle(\vec{u},\vec{v})=\frac{\vec{u}\vec{v}}{|u||\vec{v}|}=\frac{-2}{\sqrt{2}.\sqrt{7}}=-\frac{\sqrt{14}}{7}$.

б) $\vec{u}\,\vec{v}=(\vec{a}+\vec{c})\,(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})=$

$=\vec{a}^{2}+\vec{a}\vec{b}+2\vec{a}\vec{c}+\vec{a}\vec{c}+\vec{b}\vec{c}+2\vec{c}^{2}=1+0+2+1+0+8=12$.

$|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}^{2}}=\sqrt{(\vec{a}+\vec{c})^{2}}=\sqrt{\vec{a}^{2}+2\vec{a}\vec{c}+\vec{c}^{2}}=\sqrt{1+2+4}=\sqrt{7}$.

$|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}^{2}}=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})^{2}}=$

$=\sqrt{\vec{a}^{2}+\vec{b}^{2}+4\vec{c}^{2}+2\vec{a}\vec{b}+4\vec{a}\vec{c}+4\vec{b}\vec{c}}=\sqrt{1+1+16+0+4+0}=\sqrt{22}$.

$\cos\angle(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\vec{v}}{|u|\,|\vec{v}|}=\dfrac{12}{\sqrt{7}.\sqrt{22}}=\dfrac{6\sqrt{154}}{77}$.

в) $\vec{u}\,\vec{v}=(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})\,(2\vec{b}+\vec{c})==2\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}-2\vec{b}^{2}-\vec{b}\vec{c}-2\vec{b}\vec{c}-\vec{c}^{2}=0+1-2+0+0-4=-5$.

$|\vec{u}|=\sqrt{\vec{u}^{2}}=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c})^{2}}=\sqrt{\vec{a}^{2}+\vec{b}^{2}+\vec{c}^{2}-2\vec{a}\vec{b}-2\vec{a}\vec{c}+2\vec{b}\vec{c}}=\sqrt{1+1+4+0-2+0}=2$.

$|\vec{v}|=\sqrt{\vec{v}^{2}}=\sqrt{(2\vec{b}+\vec{c})^{2}}=\sqrt{4\vec{b}^{2}+4\vec{b}\vec{c}+\vec{c}^{2}}=\sqrt{4+0+4}=2\sqrt{2}$.

$\cos\angle(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\vec{v}}{|u|\,|\vec{v}|}=\dfrac{-5}{2.2.\sqrt{2}}=-\dfrac{5\sqrt{2}}{8}$.

Задача 11. Решение.

Изразяваме вектора $\vec{v}$ чрез базата: $\vec{v}=2\vec{u}-\vec{a}-\vec{b}=2(\vec{a}-2\vec{b})-\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}-5\vec{b}$.

$\vec{v}\vec{a}=(\vec{a}-5\vec{b})\vec{a}=\vec{a}^{2}-5\vec{a}\vec{b}=1-0=1$. Отговор Б.

Задача 12. Решение.

За да намерим неизвестните числа x, y и z, представяме по два начина вектора $\vec{m}-\vec{a}$, като линейна комбинация на векторите от базата:

$\vec{m}-\vec{a}=x\vec{b}-2\vec{a}+\vec{c}-\vec{a}=-3\vec{a}+x\vec{b}+\vec{c}$ и

$\vec{m}-\vec{a}=z\vec{c}+\vec{n}=z\vec{c}+y\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c}=y\vec{a}+4\vec{b}+(z-2)\vec{c}$.

Представянето на вектор, като линейна комбинация на векторите от базата е еднозначно, следователно $y=-3$, $x=4$ и $z=3$.

Тогава за $\vec{m}$ и $\vec{n}$ и скаларното им произведение получаваме:

$\vec{m}=-2\vec{a}+4\vec{b}+\vec{c}$,

$\vec{n}=-3\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c}$,

$\vec{m}\vec{n}=(-2\vec{a}+4\vec{b}+\vec{c})(-3\vec{a}+4\vec{b}-2\vec{c})=$

$=6\vec{a}^{2}-8\vec{a}\vec{b}+4\vec{a}\vec{c}-12\vec{a}\vec{b}+16\vec{b}^{2}-8\vec{b}\vec{c}-3\vec{a}\vec{c}+4\vec{b}\vec{c}-2\vec{c}^{2}=6+16-2=20$.

Задача 13. Решение.

Векторът $\vec{m}+\vec{n}$ е колинеарен с вектора $\vec{c}$, следователно съществува число z, така че $\vec{m}+\vec{n}=z\vec{c}$. В това равенство заместваме $\vec{m}$ и $\vec{n}$ с равните им изрази:

$x\vec{a}-3\vec{b}-\vec{c}+\vec{a}+y\vec{b}=z\vec{c} \Leftrightarrow$

$(x+1)\vec{a}+(y-3)\vec{b}+(-z-1)\vec{c}=\vec{0}$. (1)

Векторите $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са база, следователно са линейно независими, откъдето следва, че коефициентите в линейната комбинация (1) са равни на 0. Получаваме $x=-1$, $y=3$ и $z=-1$.

Тогава $\vec{m}=-\vec{a}-3\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{n}=\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{m}-\vec{n}=-\vec{a}-3\vec{b}-\vec{c}-(\vec{a}+3\vec{b})=-2\vec{a}-6\vec{b}-\vec{c}$.

Дължината на вектора $\vec{m}-\vec{n}$ е равна на:

$|\vec{m}-\vec{n}|=\sqrt{(-2\vec{a}-6\vec{b}-\vec{c})^2}=\sqrt{4\vec{a}^2+36\vec{b}^2+\vec{c}^2+0}=\sqrt{4+36+1}=\sqrt{41}$.

Задача 14. Решение.

Векторите $\vec{m}$ и $\vec{n}$ са перпендикулярни, което означава, че тяхното скаларно произведение е 0, т.е. $\vec{m}\vec{n}=0$,

$((x+1)\vec{a}+(y-1)\vec{b}+\vec{c})(\vec{a}+\vec{c})=0$,

$(x+1)\vec{a}^2+\vec{c}^2=0$ (записали сме само ненулевите събираеми)

Като използваме, че $\vec{a}^2=\vec{c}^2=1$, намираме, че $x+1+1=0$, $x=-2$.

Тогава $\vec{u}=2\vec{a}+x\vec{b}=2\vec{a}-2\vec{b}$ и

$|\vec{u}|=\sqrt{(2\vec{a}-2\vec{b})^2}=\sqrt{4\vec{a}^2-8\vec{a}\vec{b}+4\vec{b}^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

Задача 15. Решение.

Определяме скаларните произведения на базисните вектори: $\vec{a}^2=4$, $\vec{b}^2=4$ и $\vec{a}\vec{b}=2$.

От условието $\vec{m}\perp\vec{a}$ следва, че $\vec{m}\vec{a}=0$, т.е. $(x\vec{a}+2\vec{b})\vec{a}=0$, $x\vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}=0$, $4x+4=0$, $x=-1$ и значи $\vec{m}=-\vec{a}+2\vec{b}$.

Аналогично, от условието $\vec{n}\perp\vec{b}$ следва, че $\vec{n}\vec{b}=0$, т.е. $(-2\vec{a}+3y\vec{b})\vec{b}=0$, $-2\vec{a}\vec{b}+3y\vec{b}^2=0$, $-4+12y=0$, $y=\dfrac{1}{3}$ и значи $\vec{n}=-2\vec{a}+\vec{b}$.

За дължините на векторите получаваме:

$|\vec{m}|=\sqrt{(-\vec{a}+2\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2-4\vec{a}\vec{b}+4\vec{b}^2}=\sqrt{4-8+16}=2\sqrt{3}$.

$|\vec{n}|=\sqrt{(-2\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{4\vec{a}^2-4\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{16-8+4}=2\sqrt{3}$.

1.4. Координати на вектор в равнинна правоъгълна координатна система

Задача 3. Решение.

а) $\overrightarrow{AB}(4-2,5-3)$, $\overrightarrow{AB}(2,2)$.

б) $\overrightarrow{AB}(-2+8,-1+17)$, $\overrightarrow{AB}(6,16)$.

в) $\overrightarrow{AB}(-4-3,0+10)$, $\overrightarrow{AB}(-7,10)$.

г) $\overrightarrow{AB}(-11+5,-5-2)$, $\overrightarrow{AB}(-6,-7)$.

Задача 4. Решение.

$\overrightarrow{AB}(-2-1,-7+3)$, $\overrightarrow{AB}(-3,-4)$;

$\overrightarrow{CA}(1-5,-3-4)$, $\overrightarrow{CA}(-4,-7)$;

$\overrightarrow{BD}(-8+2,8+7)$, $\overrightarrow{BD}(-6,15)$;

$\overrightarrow{DB}(-2+8,-7-8)$, $\overrightarrow{DB}(6,-15)$;

$\overrightarrow{AD}(-8-1,8+3)$, $\overrightarrow{AD}(-9,11)$;

$\overrightarrow{DC}(5+8,4-8)$, $\overrightarrow{DC}(13,-4)$.

Задача 5. Решение.

а) По условие $A(-1,3)$ и нека $B(x,y)$, следователно $\overrightarrow{AB}(x+1,y-3)$ и тъй като $\overrightarrow{AB}(5,-4)$, получаваме системата $\left|\begin{array}{l} x+1=5 \\ y-3=-4 \end{array}\right.$, $x=4$, $y=-1$ и $B(4,-1)$.

б) По условие $B(8,-4)$ и нека $A(x,y)$, следователно $\overrightarrow{AB}(8-x,-4-y)$ и тъй като $\overrightarrow{AB}(5,-4)$, получаваме системата $\left|\begin{array}{l} 8-x=5 \\ -4-y=-4 \end{array}\right.$, $x=3$, $y=0$ и $A(3,0)$.

Задача 6. Решение.

По условие $A(-1,-1)$ и нека $B(x,y)$ и $C(z,t)$. Тогава $\overrightarrow{AB}(x+1,y+1)$ и $\overrightarrow{CA}(-1-z,-1-t)$.

Тъй като $\overrightarrow{AB}(4,3)$ и $\overrightarrow{CA}(3,-6)$, получаваме системите $\left|\begin{array}{l} x+1=4 \\ y+1=3 \end{array}\right.$ и $\left|\begin{array}{l} -1-z=3 \\ -1-t=-6 \end{array}\right.$, откъдето намираме $x=3$, $y=2$, $z=-4$ и $t=5$.

За координатите на B и C и на вектора $\overrightarrow{BC}$ имаме $B(3,2)$, $C(-4,5)$ и $\overrightarrow{BC}(-4-3,5-2)$, $\overrightarrow{BC}(-7,3)$.

1.5. Операции с вектори, зададени с координати

Задача 4. Решение.

$-\vec{a}(2,-3)$;

$3\vec{a}(3.(-2),3.3)$, $3\vec{a}(-6,9)$;

$-4\vec{b}(-4.1,-4.(-4))$, $-4\vec{b}(-4,16)$;

$\vec{a}+\vec{b}(-2+1,\ 3-4)$, $\vec{a}+\vec{b}(-1,\ -1)$;

$\vec{a}-\vec{b}(-2-1,\ 3-(-4))$, $\vec{a}-\vec{b}(-3,\ 7)$;

$2\vec{a}-3\vec{b}(2.(-2)-3.1,\ 2.3-3.(-4))$, $2\vec{a}-3\vec{b}(-7,\ 18)$.

Задача 5. Решение.

а) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}(3+2+1+2,\ -1+2+3-1)$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}(8,\ 3)$;

б) $3\vec{c}(3,\ 9)$;

в) $\vec{b}-2\vec{a}+2\vec{d}-2\vec{c}\ (2-6+4-2,\ 2+2-2-6)$, $\vec{b}-2\vec{a}+2\vec{d}-2\vec{c}\ (-2,\ -4)$.

Задача 6. Решение.

$\vec{u}=2\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{u}(2.2-2(-2),\ 2.2-2(-2))$, $\vec{u}(8,\ 8)$;

$\vec{v}=2\vec{u}+\vec{b}$, $\vec{v}(2.8-2,\ 2.8-2)$, $\vec{v}(14,\ 14)$.

Задача 7. Решение.

$\vec{m}=-\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{m}(-\alpha-1+2,\ -3-\alpha)$, $\vec{m}(1-\alpha,-3-\alpha)$;

$\vec{n}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{n}(\alpha+1+4,\ 3-2\alpha)$, $\vec{n}(\alpha+5,\ 3-2\alpha)$;

$\vec{p}=x\vec{b}$, $\vec{p}(-2x,\ \alpha x)$.

Задача 8. Решение.

$\vec{m}=2\vec{a}$, $\vec{m}(-6,6)$;

$\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{p}(2,5)$;

$\vec{u}=3\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{u}(-9+\frac{1}{2}.5,\ 9+1)$, $\vec{u}(-\frac{13}{2},10)$.

Задача 9. Решение.

За координатите на вектора $\vec{m}$ намираме $\vec{m}=\vec{a}+x\vec{b}(1+2x,\ -2+3x)$.

Векторите $\vec{m}$ и $\vec{c}$ са колинеарни, следователно съществува число λ, така че $\vec{m}=\lambda\vec{c}\,(\lambda,\ 2\lambda)$.

Координатите на вектор са еднозначно определени, следователно получаваме системата:

$\left|\begin{array}{l}1+2x=\lambda\\ -2+3x=2\lambda\end{array}\right.$, откъдето $x=-4$, $\lambda=-7$ и $\vec{m}(-7,-14)$.

За вектора $3\vec{m}$ получаваме $3\vec{m}(-21,\ -42)$.

Задача 10. Решение.

$|\vec{a}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$;

$|\vec{b}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$;

$|\vec{c}| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$;

$|\vec{d}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

Задача 11. Решение.

а) $\overrightarrow{AB}(-4,-2)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$;

б) $\overrightarrow{AB}(-1,-1)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$;

в) $\overrightarrow{AB}(1,4)$, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$.

Задача 12. Решение.

а) $\vec{a}\vec{b} = 1.(-2) + 3.1 = -2 + 3 = 1$;

б) $\vec{a}\vec{b} = 3.5 + \frac{1}{2}.4 = 15 + 2 = 17$;

в) $\vec{a}\vec{b} = -1.3 + (-1).2 = -3 - 2 = -5$.

Задача 13. Решение.

Използваме формулата $\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

а) $\vec{a}\vec{b} = -2 - 2 = -4$

$|\vec{a}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$|\vec{b}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-4}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = -\frac{4}{5}$$

б) $\vec{a}\vec{b} = 6 + 6 = 12$

$|\vec{a}| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

$|\vec{b}| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{12}{3\sqrt{2}.2\sqrt{2}} = 1$$

в) $\vec{a}\vec{b} = -8 + 2 = -6$

$|\vec{a}| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$

$|\vec{b}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$$\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-6}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} = -\frac{3}{5}.$$

Задача 14. Решение.

Намираме координатите на векторите, след което и техните дължини.

$2\vec{a}(6,4)$, $|2\vec{a}|=\sqrt{36+16}=2\sqrt{13}$

$\vec{a}+\vec{b}\ (3-1,2+1)$, $\vec{a}+\vec{b}\ (2,3)$, $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.

$2\vec{a}-3\vec{b}\ (2.3-3.(-1),\ 2.2-3.1)$, $2\vec{a}-3\vec{b}\ (9,1)$, $|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{81+1}=\sqrt{82}$.

Задача 15. Решение.

За координатите на $\vec{a}-\vec{b}$ имаме: $\vec{a}-\vec{b}\ (-2+2,\ -1+3)$, $\vec{a}-\vec{b}\ (0,\ 2)$.

Изразяваме вектора $\vec{m}+\vec{a}$, като линейна комбинация на векторите $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и тъй като знаем техните координати, то ще намерим и координатите на $\vec{m}+\vec{a}$.

$\vec{m}+\vec{a}=x\vec{a}-2\vec{b}+\vec{a}=(x+1)\vec{a}-2\vec{b}$.

$\vec{m}+\vec{a}\ ((x+1)(-2)-2.(-2),\ (x+1)(-1)-2(-3))$, $\vec{m}+\vec{a}\ (-2x+2,\ -x+5)$.

Векторите $\vec{m}+\vec{a}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ са колинеарни $\Rightarrow$ $-2x+2=0$. $x=1$.

Тогава $\vec{m}+\vec{a}\ (0,\ 4)$ и $|\vec{m}+\vec{a}|=\sqrt{0+16}=4$.

Задача 16. Решение.

Намираме координатите на вектора $\vec{p}$: $\vec{p}(3.2-\lambda(-1),\ 3.3-\lambda 2)$, $\vec{p}(6+\lambda,\ 9-2\lambda)$.

Координатите на $\vec{a}-\vec{b}$ са: $\vec{a}-\vec{b}(3,\ 1)$.

Векторите $\vec{p}$ и $\vec{a}-\vec{b}$ са перпендикулярни, следователно тяхното скаларно произведение е 0. Така получаваме уравнение за λ: $\vec{p}(\vec{a}-\vec{b})=0$, $(6+\lambda).3+(9-2\lambda).1=0$, $\lambda=-27$.

За координатите и дължината на $\vec{p}$ последователно намираме:

$\vec{p}(-21,\ 63)$, $|\vec{p}|=\sqrt{21^2+63^2}=\sqrt{21^2+9.21^2}=21\sqrt{10}$.

Задача 17. Решение.

Последователно намираме:

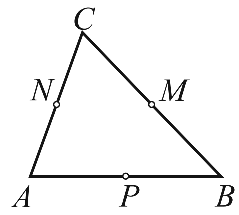
$\overrightarrow{AB}(-4,-3)$, $\overrightarrow{BC}(1,5)$, $\overrightarrow{AC}(-3,2)$.

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{16+9}=5$; $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{13}$.

$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}=12-6=6$.

$$\cos\angle(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\frac{6}{5\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{13}}{65}.$$

Задача 18. Решение.



Нека M, N и P са средите съответно на страните BC, AC и AB на ΔABC.
Последователно намираме:

$\overrightarrow{AB}(-6,4)$, $\overrightarrow{AC}(-2,6)$, $\overrightarrow{BC}(4,2)$.

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{AM}(-4,5)$ и $|\overrightarrow{AM}|=\sqrt{16+25}=\sqrt{41}$.

$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}) \Rightarrow \overrightarrow{BN}(5,-1)$ и $|\overrightarrow{BN}|=\sqrt{25+1}=\sqrt{26}$.

$\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}) \Rightarrow \overrightarrow{CP}(-1,-4)$ и $|\overrightarrow{CP}|=\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$.

Задача 19. Решение.

Нека O е пресечната точка на диагоналите на успоредника. Следователно O е средата на BD и нейните координати са $O\left(\frac{3+2}{2}, \frac{4+1}{2}\right)$, $O\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

Нека $A(x,y)$ и тъй като O е средата и на AC, то координатите на точка O са $O\left(\frac{7+x}{2}, \frac{5+y}{2}\right)$.

Така получаваме системата $\left|\begin{array}{l}\frac{7+x}{2}=\frac{5}{2}\\ \frac{5+y}{2}=\frac{5}{2}\end{array}\right.$, откъдето $x=-2$, $y=0$. Следователно $A(-2,0)$.

За страните на успоредника намираме:

$\overrightarrow{AB}(5,1)$, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{26}$

$\overrightarrow{BC}(4,4)$, $|\overrightarrow{BC}|=4\sqrt{2}$.

Задача 20. Решение.

Нека $C(x,y)$.

Точка S е средата на AC, следователно $S\left(\frac{x+1}{2},\frac{y+3}{2}\right)$ и тъй като $S(5,2)$,

то $\frac{x+1}{2}=5$, $x=9$ и $\frac{y+3}{2}=2$, $y=1 \Rightarrow C(9,1)$.

Аналогично намираме $D(4,4)$.

$\overrightarrow{AC}(8,-2)$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{64+4}=2\sqrt{17}$.

$\overrightarrow{BD}(-2,4)$, $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$.