Годишен преговор – решения на задачите

Вектори. Векторна база

1. $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$.

Нека $|\vec{a}|=|\vec{b}|$. Тъй като дължината на един вектор е квадратен корен от скаларния му квадрат, т.е. $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}$, следователно скаларните квадрати на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са равни, т.е. $\vec{a}^{\,2}=\vec{b}^{\,2}$.

Намираме скаларното произведение $\vec{p}\vec{q}$ като използваме, че $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$ и свойствата на скаларното произведение:

$$\vec{p}\vec{q}=\vec{a}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}=0.$$

Получихме, че скаларното произведение е 0, следователно векторите са перпендикулярни, т.е. $\vec{p}\perp\vec{q}$.

Нека $\vec{p}\perp\vec{q}$ $\Rightarrow$ $\vec{p}\vec{q}=0$ $\Rightarrow$ $\vec{a}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}=0$ $\Rightarrow$ $\vec{a}^{\,2}=\vec{b}^{\,2}$ $\Rightarrow$ $|\vec{a}|=|\vec{b}|$.

Ромб със страна $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ има перпендикулярни диагонали $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$.▲

2. $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=1$ и $\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{3}$

Намираме скаларното произведение на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ по формулата:

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=1.1.\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}.$$

Векторите $\vec{p}=\lambda\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{q}=-\vec{a}+\vec{b}$ са перпендикулярни точно когато $\vec{p}\vec{q}=0$.

Намираме скаларното произведение $\vec{p}\vec{q}$ като използваме, че $\vec{p}=\lambda\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{q}=-\vec{a}+\vec{b}$ и свойствата на скаларното произведение:

$$\vec{p}\vec{q}=(\lambda\vec{a}+2\vec{b})(-\vec{a}+\vec{b})=-\lambda\vec{a}^{\,2}+\lambda\vec{a}\vec{b}-2\vec{a}\vec{b}+2\vec{b}^{\,2}=0.$$

В получения израз заместваме $\vec{a}^{\,2}=\vec{b}^{\,2}=1$ и $\vec{a}\vec{b}=\frac{1}{2}$:

$$-\lambda+\frac{\lambda}{2}-1+2=0 \quad\Leftrightarrow\quad -\frac{\lambda}{2}=-1, \qquad \lambda=2.▲$$

3. Нека $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са линейно независими и $\vec{p}$ е перпендикулярен на тях.

Тъй като $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ са линейно независими, то съществуват числа (x,y,z), така че $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$.

Векторът $\vec{p}$ е перпендикулярен на $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ $\Rightarrow$ $\vec{p}\vec{a}=0$, $\vec{p}\vec{b}=0$ и $\vec{p}\vec{c}=0$.

Намираме скаларния квадрат на вектора $\vec{p}$:

$$\vec{p}^{\,2}=\vec{p}\vec{p}=\vec{p}(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})=x\vec{p}\vec{a}+y\vec{p}\vec{b}+z\vec{p}\vec{c}=0$$

Получихме, че скаларният квадрат на вектора $\vec{p}$ е 0, което е изпълнено точно когато $|\vec{p}|=0$, което е изпълнено точно когато векторът $\vec{p}$ е нулевият вектор, т.е. $\vec{p}=\vec{0}$.▲

4. $|a|=|\frac{3}{2}|$, $|b|=1$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=?$

Тъй като $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$, то трябва да намерим скаларното произведение $\vec{a}\vec{b}$.

Имаме $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$ и $\angle(\vec{p},\vec{q})=\dfrac{\pi}{3}=60°$.

Пресмятаме скаларното произведение $\vec{p}\vec{q}$ по два начина:

$\vec{p}\vec{q}=\vec{a}^{\,2}-\vec{b}^{\,2}=\dfrac{9}{4}-1=\dfrac{5}{4}$ и

$\vec{p}\vec{q}=|\vec{p}||\vec{q}|\cos\angle(\vec{p},\vec{q})=\sqrt{\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2}}\,\sqrt{a^2-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2}}\cos\dfrac{\pi}{3}$.

Приравняваме десните страни на последните две равенства и получаваме уравнение за $\vec{a}\vec{b}$:

$$\frac{5}{4}=\sqrt{\frac{9}{4}+2\vec{a}\vec{b}+1}\,\sqrt{\frac{9}{4}-2\vec{a}\vec{b}+1}\,.\frac{1}{2}.$$

$$\frac{5}{4}=\sqrt{\left(\frac{13}{4}+2\vec{a}\vec{b}\right)\left(\frac{13}{4}-2\vec{a}\vec{b}\right)}.\frac{1}{2}\;\Leftrightarrow\;\frac{5}{4}=\sqrt{\frac{13^2}{4^2}-4(\vec{a}\vec{b})^2}\,.\frac{1}{2}\;\Leftrightarrow\;\frac{5}{4}=\frac{1}{4}\sqrt{13^2-64(\vec{a}\vec{b})^2}\,.\frac{1}{2}\;\Leftrightarrow$$

$$10=\sqrt{13^2-64(\vec{a}\vec{b})^2}\;\Leftrightarrow\;100=13^2-64(\vec{a}\vec{b})^2\;\Leftrightarrow\;\vec{a}\vec{b}=\pm\sqrt{\frac{69}{64}}=\pm\frac{\sqrt{69}}{8}.$$

$$\Rightarrow\;\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\pm\frac{\sqrt{69}}{8}}{\frac{3}{2}.1}=\pm\frac{\sqrt{69}}{12}.\blacktriangle$$

5. $\vec{a}\vec{b}=?$

а) $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=60°$, $\vec{a}\vec{b}=2.3.\dfrac{1}{2}=3$.▲

б) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=1$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=135°$, $\vec{a}\vec{b}=4.1.\cos 135°=-4.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=-2\sqrt{2}$.▲

в) $|\vec{a}|=\dfrac{2}{3}$, $|\vec{b}|=5$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=30°$, $\vec{a}\vec{b}=\dfrac{2}{3}.5.\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.▲

г) $\vec{a}=\vec{b}$, $|\vec{a}|=7$, $\vec{a}\vec{b}=\vec{a}^{\,2}=49$.▲

6. $\vec{a}$ и $\vec{b}$ са нормирана база $\Rightarrow$ $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$. Трябва да намерим $\angle(\vec{a},\vec{b})=?$

а) Векторът $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$ има дължина $\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $|\vec{u}|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^{\,2}+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2}}=\sqrt{3}$,

$\sqrt{2+2\vec{a}\vec{b}}=\sqrt{3}$,

$2+2\vec{a}\vec{b}=3$,

$\vec{a}\vec{b}=\dfrac{1}{2}$.

Сега намираме $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1.1}=\dfrac{1}{2}$.

Острият ъгъл между векторите е $\angle(\vec{a},\vec{b})=60°=\dfrac{\pi}{3}$.▲

б) Векторът $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}$ има дължина $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ $|\vec{u}|=\sqrt{(\vec{a}-2\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^{\,2}-4\vec{a}\vec{b}+4\vec{b}^{\,2}}=\sqrt{2}$,

$5-4\vec{a}\vec{b}=2$,

$\vec{a}\vec{b}=\dfrac{3}{4}$,

$\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{3}{4}$.▲

7. $\vec{c}=2\vec{a}+\vec{b}$ и $\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$. Имаме $\vec{c}^{\,2}=4\vec{a}^{\,2}+4\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2}$.

а) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=10$ $\Rightarrow$ $|\vec{c}|=\sqrt{4\vec{a}^{\,2}+4\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2}}=\sqrt{36+4.3.10.\dfrac{1}{2}+100}=\sqrt{196}=14$.▲

б) $|\vec{b}|=7$, $|\vec{c}|=13$. Заместваме в равенството $\vec{c}^{\,2}=4\vec{a}^{\,2}+4\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2}$ $\Rightarrow$

$169=4|\vec{a}|^2+4|\vec{a}|7.\dfrac{1}{2}+49$,

$2|\vec{a}|^2+7|\vec{a}|-60=0$,

$|\vec{a}|_{1,2}=\dfrac{-7\pm 23}{4}$, $|\vec{a}|>0$ $\Rightarrow$ $|\vec{a}|=4$.▲

в) $|\vec{a}|=5$, $|\vec{c}|=14$. Заместваме в равенството $\vec{c}^{\,2}=4\vec{a}^{\,2}+4\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2}$ $\Rightarrow$

$196=4.25+4.5.|\vec{b}|\dfrac{1}{2}+|\vec{b}|^2$,

$|\vec{b}|^2+10|\vec{b}|-96=0$, $|\vec{b}|_{1,2}=-5\pm 11$, $|\vec{b}|>0$, $|\vec{b}|=6$.▲

г) $\vec{a}\vec{b}=20$ $\Rightarrow$ $\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\dfrac{1}{2}=20$, $|\vec{a}|\,|\vec{b}|=40$.

$|\vec{a}-\vec{b}|=7$ $\Rightarrow$ $|\vec{a}-\vec{b}|^2=49$ и $|\vec{a}-\vec{b}|^2=\vec{a}^{\,2}-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2}$, откъдето $\vec{a}^{\,2}-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2}=49$ или $|\vec{a}|^2-2.20+|\vec{b}|^2=49$.

Получаваме системата:

$$\left|\begin{array}{l}|\vec{a}|^2-2.20+|\vec{b}|^2=49\\ |\vec{a}|\,|\vec{b}|=40\end{array}\right.$$

$$\left|\begin{array}{l}|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2=89\\ 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|=80\end{array}\right. \Rightarrow (|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2=169,\ |\vec{a}|+|\vec{b}|>0,\ \Rightarrow \left|\begin{array}{l}|\vec{a}|+|\vec{b}|=13\\ |\vec{a}|\,|\vec{b}|=40\end{array}\right..$$

Тогава $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ са корени на уравнението $x^2-13x+40=0$, $(x-8)(x-5)=0$.

$|\vec{a}|=8$, $|\vec{b}|=5$ или $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$,

$|\vec{c}|^2=4\vec{a}^{\,2}+4\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2}$ | $|\vec{c}|^2=4\vec{a}^{\,2}+4\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2}$

$|\vec{c}|^2=4.64+4.20+25=361$ | $|\vec{c}|^2=4.25+4.20+64=244$

$|\vec{c}|=19$, | $|\vec{c}|=2\sqrt{61}$. ▲

8. $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=1$ $\angle(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{2}$, $\angle(\vec{b},\vec{c})=\frac{\pi}{4}$, $\angle(\vec{a},\vec{c})=\frac{\pi}{2}$.

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	1	0	0
$\vec{b}$	0	4	$\sqrt{2}$
$\vec{c}$	0	$\sqrt{2}$	1

а) $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$, $|\vec{u}|=\sqrt{4\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}-4\vec{a}\vec{b}+4\vec{a}\vec{c}-2\vec{b}\vec{c}}=$

$=\sqrt{4.1+4+1-2\sqrt{2}}=\sqrt{9-2\sqrt{2}}$.▲

б) $\vec{p}=3\vec{a}+\vec{c}$, $|\vec{p}|=\sqrt{9\vec{a}^{\,2}+6\vec{a}\vec{c}+\vec{c}^{\,2}}=\sqrt{9+0+1}=\sqrt{10}$.▲

в) $\vec{q}=\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{c}$,

$|\vec{q}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}+4\vec{b}^{\,2}+9\vec{c}^{\,2}-4\vec{a}\vec{b}-6\vec{a}\vec{c}+12\vec{b}\vec{c}}=\sqrt{1+16+9+12\sqrt{2}}=\sqrt{26+12\sqrt{2}}$.▲

9. $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\angle(\vec{b},\vec{c})=\frac{\pi}{3}$, $\angle(\vec{a},\vec{c})=\frac{\pi}{2}$.

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	1	1	0
$\vec{b}$	1	4	3
$\vec{c}$	0	3	9

а) $\vec{u}=\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$, $|\vec{u}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}+4\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}+4\vec{a}\vec{b}+2\vec{a}\vec{c}+4\vec{b}\vec{c}}=\sqrt{1+16+9+4+12}=\sqrt{42}$.▲

б) $\vec{v}=\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c}$, $|\vec{v}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+4\vec{c}^{\,2}-2\vec{a}\vec{b}-4\vec{a}\vec{c}+4\vec{b}\vec{c}}=\sqrt{1+4+36-2+12}=\sqrt{51}$.▲

в) $\vec{p}=2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, $|\vec{p}|=\sqrt{4\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}+4\vec{a}\vec{b}-4\vec{a}\vec{c}-2\vec{b}\vec{c}}=\sqrt{4+4+9+4-6}=\sqrt{15}$.▲

10. $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=\angle(\vec{b},\vec{c})=\frac{\pi}{2}$, $\angle(\vec{a},\vec{c})=\frac{\pi}{3}$.

	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
$\vec{a}$	4	0	1
$\vec{b}$	0	1	0
$\vec{c}$	1	0	1

а) $\vec{p}\vec{q}=(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})(\vec{a}+2\vec{b})=\vec{a}^{\,2}+\vec{a}\vec{b}-\vec{a}\vec{c}+2\vec{a}\vec{b}+2\vec{b}^{\,2}-2\vec{b}\vec{c}=4-1+2=5$,

$|\vec{p}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}+2\vec{a}\vec{b}-2\vec{a}\vec{c}-2\vec{b}\vec{c}}=\sqrt{4+1+1-2}=2$,

$|\vec{q}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}+4\vec{a}\vec{b}+4\vec{b}^{\,2}}=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$,

$\cos(\vec{p},\vec{q})=\frac{\vec{p}\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}=\frac{5}{2.2\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$.▲

б) $\vec{p}\vec{q}=(\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}^{\,2}-\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}+2\vec{a}\vec{b}-2\vec{b}^{\,2}+2\vec{b}\vec{c}+\vec{a}\vec{c}-\vec{b}\vec{c}+\vec{c}^{\,2}=$

$=4+1-2+1+1=5$,

$|\vec{p}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}+4\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}+4\vec{a}\vec{b}+2\vec{a}\vec{c}+4\vec{b}\vec{c}}=\sqrt{4+4+1+2}=\sqrt{11}$,

$|\vec{q}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}-2\vec{a}\vec{b}+2\vec{a}\vec{c}-2\vec{b}\vec{c}}=\sqrt{4+1+1+2}=2\sqrt{2}$,

$\cos(\vec{p},\vec{q})=\frac{\vec{p}\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}=\frac{5}{\sqrt{11}.2\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{22}}{44}$.▲

в) $\vec{p}\vec{q}=(\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c})(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\ =\ \vec{a}^{\,2}+\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}-\vec{a}\vec{b}-\vec{b}^{\,2}-\vec{b}\vec{c}+2\vec{a}\vec{c}+2\vec{b}\vec{c}+2\vec{c}^{\,2}\ =$
$=4+1-1+2+2=8$,

$|\vec{p}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+4\vec{c}^{\,2}-2\vec{a}\vec{b}+4\vec{a}\vec{c}-4\vec{b}\vec{c}}\ =\sqrt{4+1+4+4}=\sqrt{13}$,

$|\vec{q}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}+\vec{b}^{\,2}+\vec{c}^{\,2}+2\vec{a}\vec{b}+2\vec{a}\vec{c}+2\vec{b}\vec{c}}\ =\ \sqrt{4+1+1+2}=2\sqrt{2}$,

$\cos(\vec{p},\vec{q})=\dfrac{\vec{p}\vec{q}}{|\vec{p}||\vec{q}|}=\dfrac{8}{\sqrt{13}.2\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{26}}{13}$.▲

11. $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\vec{b}=-1,5$, $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{-1,5}{1.3}=-\dfrac{1}{2}$, $\angle(\vec{a},\vec{b})=120°$, **В).**▲

12. $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\angle(\vec{a};\vec{b})=\dfrac{\pi}{3}$, $\vec{a}\vec{b}=3.2.\dfrac{1}{2}=3$, **А).** ▲

<u>Вектори. Координати на вектор</u>

13. $M(2;1)$, $N(\sqrt{2};-2\sqrt{2})$, $\overrightarrow{MN}(\sqrt{2}-2,-2\sqrt{2}-1)$,
$|MN|=\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2+(-2\sqrt{2}-1)^2}=\sqrt{2-4\sqrt{2}+4+8+4\sqrt{2}+1}=\sqrt{15}$.▲

14. $\vec{a}(-1;0)$, $\vec{b}(3;2)$.

а) $\vec{a}\vec{b}=\sqrt{x_ax_b+y_ay_b}=\sqrt{-1.3+0.2}=-3+0=-3$.▲

б) $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}=\sqrt{x_a^{\,2}+y_a^{\,2}}=\sqrt{(-1)^2+0^2}=\sqrt{1}=1$, $\quad |\vec{b}|=\sqrt{\vec{b}^{\,2}}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$.▲

в) $\cos\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-3}{1.\sqrt{13}}=-\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.▲

15.

а) $A(2,1)$, $B(5,2)$, $M\left(\dfrac{2+5}{2};\dfrac{1+2}{2}\right)$, $M\left(\dfrac{7}{2};\dfrac{3}{2}\right)$.▲

б) $A(4,-3)$, $M(1,3)$, $B(x,y)$, $1=\dfrac{4+x}{2}$, $x=-2$ и $3=\dfrac{-3+y}{2}$, $y=9$, $B(-2,9)$.▲

16. $\vec{a}(2;-1)$, $\vec{b}(-2;1)$, $\vec{c}(-1;3)$.

а) $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$

Последователно намираме координатите x_u и y_u на вектора $\vec{u}$:

$x_u=2x_a+3x_b-x_c$, $\quad x_u=2.2+3(-2)-(-1)=4-6+1=-1$.

$y_u=2y_a+3y_b-y_c$, $\quad y_u=2(-1)+3.1-3=-2+3-3=-2$.

$\Rightarrow\ \vec{u}(4-6+1,\ -2+3-3)$, $\ \vec{u}(-1,-2)$.▲

б) $\vec{v}=\vec{c}-4\vec{b}$, $\ \vec{v}(-1+8,3-4)$, $\ \vec{v}(7,-1)$.▲

в) $\vec{p}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$, $\ \vec{p}(1-4+3,-\dfrac{1}{2}+2-9)$, $\ \vec{p}\left(0,-\dfrac{15}{2}\right)$.▲

Аналитична геометрия

17. $M_1(0;2)$, $M_2(2;5)$

а) Вектор, колинеарен с правата, е $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{p}(2-0,\ 5-2)$, $\vec{p}(2,3)$.

б) *I. начин*. Вектор $\vec{p}(-B, A)$ е колинеарен с права с общо уравнение $Ax + By + C = 0$. В конкретния случай $\vec{p}(2,3)$ $\Rightarrow$ $g: 3x - 2y + C = 0$. Декартовото уравнение на правата е $y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{C}{2}$ $\Rightarrow$ $k = \dfrac{3}{2}$.

II. начин. $k = -\dfrac{A}{B}$ и тъй като $\vec{p}(-B, A) = \vec{p}(2,3)$ $\Rightarrow$ $B = -2$, $A = 3$, $k = \dfrac{3}{2}$.

Общо решение за а) и б).

Записваме уравнението на права през две точки: $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{x-0}{2-0} = \dfrac{y-2}{5-2}$ $\Leftrightarrow$ $3x = 2y - 4$.

Общото и декартовото уравнение на правата са съответно $3x - 2y + 4 = 0$ и $y = \dfrac{3}{2}x + 2$, откъдето намираме колинеарен вектор $\vec{p}(-B, A) = \vec{p}(2,3)$ и ъглов коефициент $k = \dfrac{3}{2}$ ▲

18. $k = 2$, $\Rightarrow$ декартовото уравнение на правата има вида $y = 2x + b$.

$M(0,-3) \in g$ $\Rightarrow$ $-3 = 2.0 + b$, $b = -3$.

Декартовото уравнението на правата е $y = 2x - 3$ $\Rightarrow$ общото ѝ уравнение е $2x - y - 3 = 0$. Колинеарен вектор с правата има координати $\vec{p}(-B, A) = (1,2)$. ▲

19. $\vec{p}(4;1)$ и $\vec{p}(-B, A)$ $\Rightarrow$ $B = -4$, $A = 1$, уравнението на g е $x - 4y + C = 0$.

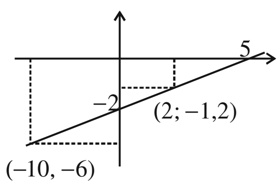
От условието, че $M(0;2)$ лежи на g, определяме C: $0 - 4.2 + C = 0$, $C = 8$ $\Rightarrow$ общото уравнение на g е $x - 4y + 8 = 0$.

Дакартовото уравнение на g е $y = \dfrac{1}{4}x + 2$ и ъгловият коефициент е $k = \dfrac{1}{4}$. ▲

20. $M \in g$, $\dfrac{d(M, Ox)}{d(M, Oy)} = a$.

Нека $M(x, y)$. Имаме $d(M, Ox) = |y|$ и $d(M, Oy) = |x|$ $\Rightarrow$ $\dfrac{d(M, Ox)}{d(M, Oy)} = \dfrac{|y|}{|x|} = a$

а) $a = \dfrac{3}{5}$, $g: 2x - 5y - 10 = 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{|y|}{|x|} = \dfrac{3}{5}$.



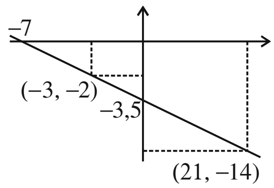
I. случай. $xy > 0$ $\Rightarrow$ $\left|\dfrac{y}{x}\right| = \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{5}$, $5y = 3x$. Заместваме в уравнението на g ($M \in g$) и получаваме $2x - 3x - 10 = 0$, $x = -10$, $y = -\dfrac{30}{5} = -6$ $\Rightarrow$ $M(-10, -6)$.

II. случай. $xy<0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{y}{x}\right| = -\frac{y}{x} = \frac{3}{5}, \quad -5y = 3x \quad \Rightarrow \quad 2x+3x-10=0, \ x=2, \ y=-\frac{6}{5} \quad \Rightarrow$

$M\left(2,-\frac{6}{5}\right)$.

За да начертаем правата, пресмятаме: при $x=0$, $y=-2$ и при $y=0$, $x=5$.▲

б) $a=\frac{2}{3}$, $g: \ x+2y+7=0$, $\frac{|y|}{|x|}=\frac{2}{3}$.



I. случай. $xy>0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{y}{x}\right| = \frac{y}{x} = \frac{2}{3}, \quad x=\frac{3y}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{3y}{2}+2y+7=0,$

$y=-2, \ x=-3 \quad \Rightarrow \quad M(-3,-2)$.

II. случай. $xy<0 \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{y}{x}\right| = -\frac{y}{x} = \frac{2}{3}, \quad x=-\frac{3y}{2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3y}{2}+2y+7=0, \ y=-14, \ x=21,$

$\Rightarrow \quad M(21,-14)$.

За да начертаем правата, пресмятаме: при $x=0$, $y=-3{,}5$; при $y=0$, $x=-7$.▲

21. $M(1;3)\in a$, $N(3;-1)\in d$, **Г).▲**

22. Точките $(0,-2)$, $(-3,0)$ лежат на правата $\Rightarrow$ уравнението ѝ е $\frac{x-0}{-3-0}=\frac{y+2}{0+2}$,

$\frac{x}{-3}=\frac{y+2}{2}, \quad y=-\frac{2}{3}x-2$, **А).▲**

23.

а) $\left| \begin{array}{l} 2x+2y-5=0 \\ \quad 2y=3 \end{array} \right. \Rightarrow \quad x=1, \ y=\frac{3}{2}, \quad M\left(1,\frac{3}{2}\right),$

$\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}.\sqrt{A_2^2+B_2^2}} = \frac{0+4}{\sqrt{4+4}\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.▲

б) $\left| \begin{array}{l} x+2y-6=0 \\ y=3-\frac{x}{2} \end{array} \right., \quad \left| \begin{array}{l} x+2y-6=0 \\ x+2y-6=0 \end{array} \right.$ – правите съвпадат. ▲

в) $\left| \begin{array}{l} 4x+y-1=0 \ \ /.2 \\ x-2y+2=0 \end{array} \right. +, \quad 9x=0, \quad \left| \begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \end{array} \right., \quad M(0,1), \quad \cos\varphi=\frac{4-2}{\sqrt{16+1}\sqrt{1+4}}=\frac{2\sqrt{85}}{85}$.▲

г) $\left| \begin{array}{l} x+3y=0 \ \ /.(-3) \\ 3x+2y-7=0 \end{array} \right. + \quad -7y-7=0, \quad \left| \begin{array}{l} x=3 \\ y=-1 \end{array} \right., \quad M(3,-1), \ \cos\varphi=\frac{3+6}{\sqrt{1+9}\sqrt{9+4}}=\frac{9\sqrt{130}}{130}$.▲

24. $g:\ 2x+y-7=0$. Намираме права g_1, перпендикулярна на g и минаваща през A. Това може да направим:

– като използваме, че две прави са перпендикулярни точно когато $k_1k_2=-1$. В конкретния случай $k_1=-2 \Rightarrow k_2=\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ ъгловият коефициент на перпендикулярната на g права е $\dfrac{1}{2}$. Тогава декартовото ѝ уравнение има вида $y=\dfrac{1}{2}x+b$ и тъй като $A(-2,1)$ лежи на g_1, то $g_1:\ x-2y+4=0$.

– като използваме условието $A_1A_2+B_1B_2=0$, записваме уравнението на g_1 във вида $g_1:\ x-2y+C=0$. Отново g_1 минава през $A(-2,1) \Rightarrow g_1:\ x-2y+4=0$.

Намираме пресечната точка на двете прави $\begin{array}{r|l} g: & 2x+y-7=0 \\ g_1: & x-2y+4=0 \end{array} \Rightarrow x=2,\ y=3,\ M(2,3)$.

Следователно разстоянието от A до g е: $|AM|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$.▲

25. $p:\ 4x-3y+15=0$, Намираме права p_1, перпендикулярна на p и минаваща през точката $A(1;-2)$: $p_1:\ 3x+4y+5=0$. Намираме пресечната точка на p и p_1 $\begin{array}{r|l} p: & 4x-3y+15=0 \\ p_1: & 3x+4y+5=0 \end{array}$, $x=-3,\ y=1,\ M(-3,1)$. Търсената точка $B(x,y)$ е такава, че M е средата на AB: $\dfrac{x+1}{2}=-3$, $x=-7$ и $\dfrac{y-2}{2}=1,\ y=4 \Rightarrow B(-7,4)$.▲

26. $A(-2;1),\ B(6;-3),\ C(2;4)$.

а) $G\left(\dfrac{-2+6+2}{3},\dfrac{1-3+4}{3}\right),\ G\left(2,\dfrac{2}{3}\right)$.▲

б) $M_a\left(\dfrac{6+2}{2},\dfrac{-3+4}{2}\right)=\left(4,\dfrac{1}{2}\right),\ M_b\left(\dfrac{-2+2}{2},\dfrac{1+4}{2}\right)=\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$ и $M_c\left(\dfrac{-2+6}{2},\dfrac{1-3}{2}\right)=(2,-1)$.▲

в)

$a\equiv BC:\ \dfrac{x-6}{2-6}=\dfrac{y+3}{4+3},\ 7x+4y-30=0,$

$b\equiv AC:\ \dfrac{x+2}{2+2}=\dfrac{y-1}{4-1},\ 3x-4y+10=0,$

$c\equiv AB:\ \dfrac{x+2}{6+2}=\dfrac{y-1}{-3-1},\ \ x+2y=0$.▲

г) $A(-2;1),\ M_a\left(4,\dfrac{1}{2}\right),\ m_a\equiv AM_a:\ \dfrac{x+2}{4+2}=\dfrac{y-1}{\frac{1}{2}-1},\ \ x+12y-10=0$,

$B(6;-3),\ M_b\left(0,\dfrac{5}{2}\right),\ m_b\equiv BM_b:\ \dfrac{x-6}{0-6}=\dfrac{y+3}{\frac{5}{2}+3},\ \ 11x+12y-30=0,$

$C(2;4),\ M_c(2,-1),\ x_C=x_{M_C}=2 \Rightarrow m_c\equiv CM_c:\ x=2$.▲

д)

$a \equiv BC:\ 7x+4y-30=0$. Височината $h_a:\ 4x-7y+C=0$ минава през точка $A(-2;1)$ $\Rightarrow$ $C=15$ $\Rightarrow$ $h_a:\ 4x-7y+15=0$;

$b \equiv AC:\ 3x-4y+10=0$. Височината $h_b:\ 4x+3y+C=0$ минава през точка $B(6;-3)$ $\Rightarrow$ $C=-15$ $\Rightarrow$ $h_b:\ 4x+3y-15=0$;

$c \equiv AB:\ x+2y=0$, $h_c:\ 2x-y=0$.▲

е)

$$H_a:\quad \begin{array}{r|l} BC: & 7x+4y-30=0 \\ h_a: & 4x-7y+15=0 \end{array},\quad x=\frac{30}{13},\quad y=\frac{45}{13},\quad H_a\left(\frac{30}{13},\frac{45}{13}\right);$$

$$H_b:\quad \begin{array}{r|l} AC: & 3x-4y+10=0 \\ h_b: & 4x+3y-15=0 \end{array},\quad x=\frac{6}{5},\quad y=\frac{17}{5},\quad H_b\left(\frac{6}{5},\frac{17}{5}\right);$$

$$H_c:\quad \begin{array}{r|l} AB: & x+2y=0 \\ h_c: & 2x-y=0 \end{array},\quad H_c(0,0).▲$$

ж)

$|AB|=\sqrt{(6+2)^2+(-3-1)^2}=4\sqrt{5}$,

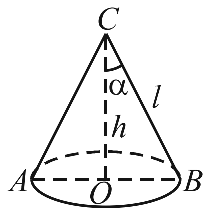
$|BC|=\sqrt{(2-6)^2+(4+3)^2}=\sqrt{65}$,

$|AC|=\sqrt{(2+2)^2+(4-1)^2}=5$,

$P_{ABC}=4\sqrt{5}+\sqrt{65}+5$.▲

з) $S_{ABC}=\dfrac{|AB|\,|h_c|}{2}$, където $|h_c|=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$ е разстоянието между $C(2;4)$ и $H_c(0,0)$. $S_{ABC}=\dfrac{4\sqrt{5}.2\sqrt{5}}{2}=20$.▲

Стереометрия



27. $\angle ACB = 2\alpha$, $h + l = a$, $S = ?$, $V = ?$

$$\left| \begin{array}{l} h = l\cos\alpha \\ h + l = a \end{array} \right., \quad l\cos\alpha + l = a, \quad l = \frac{a}{1+\cos\alpha}, \quad h = \frac{a\cos\alpha}{1+\cos\alpha},$$

$$r = l\sin\alpha = \frac{a\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

$$S = \pi r(r+l) = \pi\frac{a\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\left(\frac{a\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{a}{1+\cos\alpha}\right) = \frac{\pi a^2\sin\alpha(1+\sin\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1+\cos\alpha)} = \frac{\pi a^2\sin\alpha(1+\sin\alpha)}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}} =$$

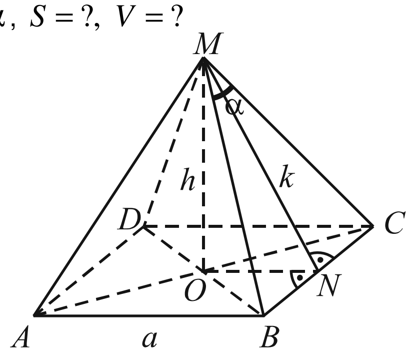
$$= \frac{\pi a^2 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}(1+\sin\alpha)}{4\cos^4\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi a^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(1+\sin\alpha)}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi a^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}.\frac{1+\cos(90-\alpha)}{2} =$$

$$= \frac{\pi a^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\ \cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}.$$

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi}{3}.\frac{a^2\sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}.\frac{a\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)} = \frac{\pi a^3\sin^2\alpha\ \cos\alpha}{3.4\cos^4\frac{\alpha}{2}\ 2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi a^3 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{3.4\cos^4\frac{\alpha}{2}2\cos^2\frac{\alpha}{2}} =$$

$$\frac{\pi a^3\ \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{6\cos^2\frac{\alpha}{2}}.\blacktriangle$$

28. Правилна четириъгълна пирамида $ABCDM$, h, $\angle BMC = \alpha$, $S = ?$, $V = ?$



Нека N е средата на BC и проекцията на M е O.

$$S = \frac{4ak}{2} = 2ak.$$

От ΔBNM: $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{BN}{MN} = \frac{a}{2k} \quad\Rightarrow\quad a = 2k\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

От ΔONM: $k^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$, $k^2 = h^2 + \frac{4k^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{4}$,

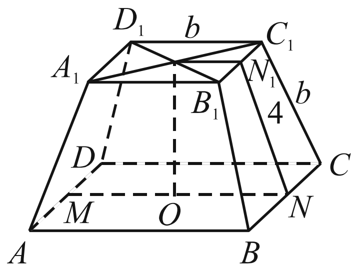
$k^2 = h^2 + k^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$, откъдето намираме k^2: $k^2 = \frac{h^2}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{h^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{h^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} \quad\Rightarrow$

$$S = 2ak = 2.2k\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.k = 4k^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 4.\frac{h^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{4h^2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = \frac{2h^2\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2h^2\operatorname{tg}\alpha.$$

$$V = \frac{a^2 h}{3} = \frac{4k^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}.h}{3} = \frac{4h^3\cos^2\frac{\alpha}{2}.\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{3\cos\alpha} = \frac{4h^3\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3\cos\alpha}.\blacktriangle$$

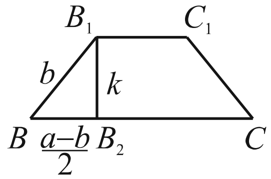
29. Правилна четириъгълна пресечена пирамида, $l=b$, $P_{\text{ок. стена}}=26$, $k=4$, $h=?$, $S=?$.

При стандартни означения имаме:



$P_{\text{ок. стена}}=a+3b=26$.

$b^2=4^2+\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$ – от питагоровата теорема за ΔBB_2B_1 (виж чертежа).

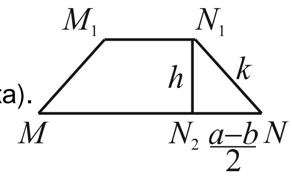


Получаваме системата:

$$\left|\begin{array}{ll} a+3b=26 & \rightarrow\ a=26-3b \\ b^2=4^2+\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 & \end{array}\right., \quad b^2=4^2+\frac{(26-4b)^2}{4}, \quad 3b^2-52b+185=0, \quad b=\frac{26\pm 11}{3},$$

$b_1=5$, $a_1=11$; $b_2=\dfrac{37}{3}$, $a_2=26-37<0 \;\Rightarrow\; a=11,\ b=5$.

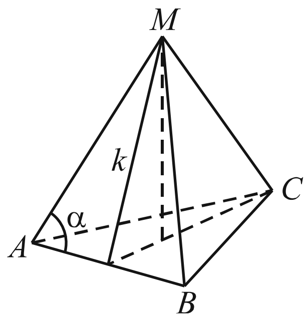
$S=4\dfrac{a+b}{2}k=4.8.4=128$ cm^2.



$h^2=k^2-\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2$ – от питагоровата теорема за ΔN_2N_1N (виж чертежа).

$\Rightarrow\ h=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$ cm.▲

30. Правилна триъгълна пирамида, r, α, $S_1=?$.



$r=\dfrac{1}{3}a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $a=2\sqrt{3}\,r$.

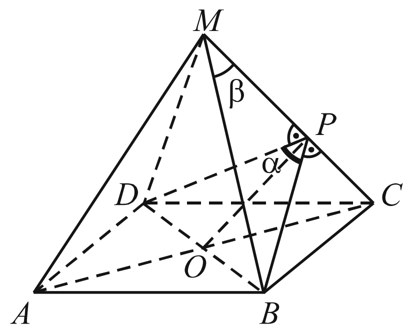
$k=\dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}\,r\operatorname{tg}\alpha$.

$$S_1=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}+3\frac{a\sqrt{3}\,r\operatorname{tg}\alpha}{2}=\frac{12r^2\sqrt{3}}{4}+3\frac{2\sqrt{3}\,r.\sqrt{3}\,r\operatorname{tg}\alpha}{2}=$$

$$=9r^2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\operatorname{tg}\alpha\right)=9r^2\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{tg}\alpha\right)=9r^2\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ}\right)=9r^2\left(\frac{\sin\alpha\cos 30^\circ+\cos\alpha\sin 30^\circ}{\cos\alpha\cos 30^\circ}\right)=$$

$$=9r^2\frac{\sin(\alpha+30^\circ)}{\cos\alpha.\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{9r^2 2\sin(\alpha+30^\circ)}{\sqrt{3}\cos\alpha}=\frac{6\sqrt{3}\,r^2\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)}{\cos\alpha}.▲$$

31. Правилна четириъгълна пирамида, α, $\beta = ?$.



Построяваме $BP \perp CM$, $\Delta BCP \cong \Delta DCP$ $\Rightarrow$ $\angle DPC = \angle BPC = 90°$ $\Rightarrow$ $DP \perp CM$ $\Rightarrow$ $\angle BPD$ е линеен ъгъл на двустенния ъгъл между две околни стени $\Rightarrow$ $\angle BPD = \alpha$.

Нека основният ръб на пирамидата е a $\Rightarrow$ $BO = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

От ΔOBP имаме $\dfrac{OB}{BP} = \sin\dfrac{\alpha}{2}$ $\Rightarrow$

(1) $$BP = \frac{OB}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

$\angle BMC = \beta$ $\Rightarrow$ $\angle BCP = \dfrac{180° - \beta}{2} = 90° - \dfrac{\beta}{2}$.

От ΔBCP: $\dfrac{BP}{BC} = \sin\left(90° - \dfrac{\beta}{2}\right)$ $\Rightarrow$

(2) $$BP = a\sin\left(90° - \frac{\beta}{2}\right) = a\cos\frac{\beta}{2}.$$

От (1) и (2) получаваме $\dfrac{a\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = a\cos\dfrac{\beta}{2}$ $\Rightarrow$ $\cos\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Получихме израз за $\cos\dfrac{\beta}{2}$ чрез дадения ъгъл α. Остава да получим израз за $\cos\beta$. Имаме:

$1 + \cos\beta = 2\cos^2\dfrac{\beta}{2}$ $\Rightarrow$

$$\cos\beta = 2\cos^2\frac{\beta}{2} - 1 = 2\frac{2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 1 = \frac{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}.▲$$

32. Прав кръгов цилиндър, $V = a$, $S = 3a$, $S_1 = 5a$, $a = ?$, $r = ?$, $h = ?$.

По условие $S_1 - S = 5a - 3a = 2a$.

От друга страна $S_1 - S = 2\pi r^2$ $\Rightarrow$ $a = \pi r^2$ $\Rightarrow$ $r^2 = \dfrac{a}{\pi}$.

По условие $V = a$. От друга страна $V = \pi r^2 h$ $\Rightarrow$ $\pi r^2 h = a$ $\Rightarrow$ $\pi\dfrac{a}{\pi}h = a$, $h = 1$ m.

В равенството $S = 2\pi rh = 3a$ заместваме $h = 1$ и $a = \pi r^2$. Получаваме $2\pi r = 3\pi r^2$, $r \neq 0$, $r = \dfrac{2}{3}$ m.

Тогава $a = \pi r^2 = \dfrac{4}{9}\pi$.▲

33. Правоъгълен триъгълник, $a=3$, $b=4$, $V=?$, $S=?$

В правоъгълен триъгълник с катети $a=3$ и $b=4$ хипотенузата е $c=5$, височината е $h=2,4$.

Обемът на полученото тяло е равен на обема на два конуса с радиуси, равни на h и височини c_1 и c_2, чийто сбор е равен на c. Повърхнината е равна на сбора от околните повърхнини на два конуса с радиуси h и околни ръбове a и b.

$$V=\frac{\pi h^2 c_1}{3}+\frac{\pi h^2 c_2}{3}=\frac{\pi h^2 c}{3}=\frac{\pi 2,4^2 5}{3}=9,6\pi\ \mathrm{cm}^3,\ S=\pi 2,4.3+\pi 2,4.4=16,8\pi\ \mathrm{cm}^2.\blacktriangle$$

34. Нека конус K е с елементи $r,\ l,\ h$. Формулата за околната му повърхнина е $S=\pi rl$.

Околната повърхнина на всеки конус е кръгов сектор с радиус, равен на образуващата му l.

По условие околната повърхнина на конус K е полукръг (кръгов сектор), откъдето изразяваме S като $\frac{1}{2}$ от лицето на кръг с радиус l, т.е. $S=\frac{1}{2}\pi l^2$. От получените два израза за S намираме $\pi rl=\frac{1}{2}\pi l^2$ или $l=2r$. (1)

Сега да разгледаме другата част от условието на задачата, която дава връзка между конусите K и K_1. Нека елементите на конус K_1 са r_1, l_1, h (по условие двата конуса имат равни височини).

Имаме, че околната повърхнина на конус K е кръгов сектор (полукръг) с радиус, равен на r_1, т.е. $l=r_1$. (2)

Като използваме двата получени за l израза (1) и (2), намираме $l=2r=r_1$, т.е. $r_1=2r$.

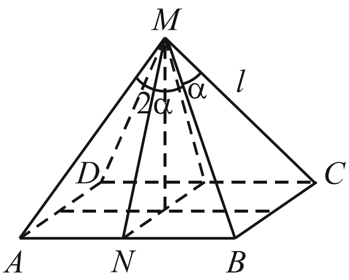
Да намерим образуващата l_1 на конус K_1:

$l_1^2=h^2+r_1^2=h^2+4r^2$.

За конус K имаме $h^2=l^2-r^2=4r^2-r^2=3r^2$. $\Rightarrow$ $l_1^2=h^2+4r^2=3r^2+4r^2=7r^2$ или $l_1=r\sqrt{7}$.

Окончателно намираме: $\dfrac{S_{K_1}}{S_K}=\dfrac{\pi r_1 l_1}{\pi r l}=\dfrac{\pi.2r.r\sqrt{7}}{\pi r.2r}=\sqrt{7}.\blacktriangle$

35. Пирамида с основа правоъгълник, $l,\ \alpha, 2\alpha$, $V=?$.



Нека основните ръбове са a и b съответно в триъгълници на околни стени с ъгли срещу тях 2α и α.

Имаме $\frac{a}{2}=l\sin\alpha$, $a=2l\sin\alpha$ и $\frac{b}{2}=l\sin\frac{\alpha}{2}$, $b=2l\sin\frac{\alpha}{2}$.

Нека N е средата на AB $\Rightarrow$ $MN\perp AB$, $MN=l\cos\alpha$.

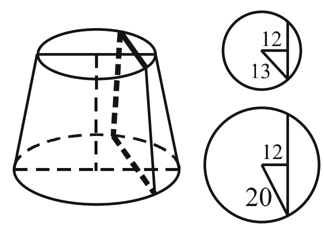
$$h^2=MN^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2=l^2\cos^2\alpha-l^2\sin^2\frac{\alpha}{2},\ h=l\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

$$V=\frac{abh}{3}=\frac{2l\sin\alpha.2l\sin\frac{\alpha}{2}.l\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{3}=\frac{4}{3}l^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Преобразували сме:

$$\cos^2\alpha-\sin^2\frac{\alpha}{2}=\cos^2\alpha-\frac{1-\cos\alpha}{2}=\frac{2\cos^2\alpha-1+\cos\alpha}{2}=\frac{\cos 2\alpha+\cos\alpha}{2}=\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.\blacktriangle$$

36. $R = 20$, $r = 13$, $l = 25$, $d = 12$, $S_{\text{сеч.}} = ?$

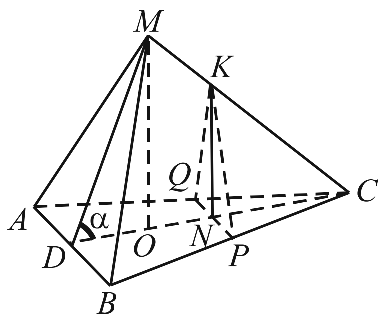


Сечението е равнобедрен трапец с бедро l, основи a и b и височина h, където $\dfrac{a}{2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$, $\dfrac{b}{2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$,

$h = \sqrt{25^2 - 11^2} = 6\sqrt{14}$

$\Rightarrow\ S_{\text{сеч.}} = \dfrac{a+b}{2}h = = \dfrac{32+10}{2}.6\sqrt{14} = 126\sqrt{14}$.▲

37. Правилна триъгълна пирамида $ABCM$ с височина MO и основен ръб a. Височината на сечението е $KN = h$, $K \in CM$, $N \in CO$. $CO \cap AB = D$, $\angle(\text{ок.ст., осн.}) = \angle CDM = \alpha$.



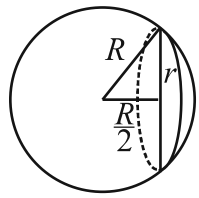
От ΔOCM: $\dfrac{MO}{KN} = \dfrac{OC}{NC} = \dfrac{\frac{2}{3}DC}{\frac{DC}{2}} = \dfrac{4}{3}\quad \Rightarrow\quad MO = \dfrac{4h}{3}$.

От ΔDOM: $\dfrac{DO}{MO} = \operatorname{cotg}\alpha$, $DO = MO\operatorname{cotg}\alpha$,

$\dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{4h}{3}\operatorname{cotg}\alpha$, $\quad a = \dfrac{8h\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{3}}$.

$V = \dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}.MO = \dfrac{1}{3}\dfrac{64h^2\operatorname{cotg}^2\alpha}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{4}\dfrac{4h}{3} = \dfrac{64\sqrt{3}\,h^3\operatorname{cotg}^2\alpha}{27}$.▲

38. R – радиус на кълбото, r – радиус на сечението.

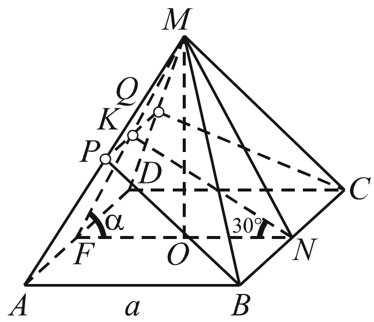


В равнина през центъра на кълбото и перпендикулярна на сечението прилагаме питагорова теорема за правоъгълен триъгълник с хипотенуза R и катети r и $\dfrac{R}{2}$ – разстоянието от центъра на кълбото до сечението:

$R^2 = \dfrac{R^2}{4} + r^2$, $r^2 = \dfrac{3R^2}{4}$, $S_{\text{сеч}} = \pi r^2 = \dfrac{\pi 3R^2}{4} = Q$, $R^2 = \dfrac{4Q}{3\pi}$.

$S = 4\pi R^2 = 4\pi\dfrac{4Q}{3\pi} = \dfrac{16Q}{3}$.▲

39. За да съществува сечението, трябва $\alpha > 30°$.



Нека дадената пирамида е $ABCDM$ и нека F и N са средите съответно на AD и BC. В ΔFNM през върха N построяваме NK, $K \in MF$, така че $\angle FNK = 30°$. Проекцията на M е средата O на FN и проекцията на KN е правата FN. Тъй като $FN \perp BC$, то и $KN \perp BC$ (по теоремата за трите перпендикуляра), тогава $\angle(ABCD, BCK) = \angle FNK = 30°$.

Тъй като $BC \parallel AD$, то равнината (BCK) ще пресича равнината (ADM) в права, успоредна на BC – нека това е правата $PQ \parallel BC \parallel AD$, $P \in AM$ и $Q \in DM$.

Така получихме, че четириъгълникът $BCQP$ е сечението, чието лице се търси.

$BCQP$ е равнобедрен трапец. Наистина: $BC \parallel PQ$ по построение. Триъгълниците ABP и DCQ са еднакви ($AB = DC$, $AP = DQ$ и $\angle BAP = \angle CDQ$) $\Rightarrow$ $BCQP$ е равнобедрен трапец.

Имаме $NF \perp AD$ и $MF \perp AD$ $\Rightarrow$ $\angle NFM = \alpha$. Аналогично – $\angle FNM = \alpha$.

Прилагаме синусовата теорема за ΔFNK:

$\dfrac{KN}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sin(150-\alpha)}$ $\Rightarrow$ $KN = \dfrac{a\sin\alpha}{\sin(150-\alpha)} = \dfrac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+30)}$, което е височината на трапеца.

От $\Delta PQM \sim \Delta ADM$ получаваме, че

(1) $\dfrac{PQ}{a} = \dfrac{MK}{MF} = \dfrac{MK}{MN}$ (последното равенство е изпълнено, защото $MF = MN$).

От синусовата теорема за ΔKNM: $\dfrac{MK}{\sin(\alpha-30°)} = \dfrac{MN}{\sin(\alpha+30°)}$ $\Rightarrow$

(2) $\dfrac{MK}{MN} = \dfrac{\sin(\alpha-30°)}{\sin(\alpha+30°)}$.

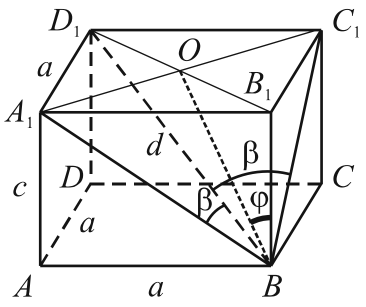
От (1) и (2) намираме $PQ = \dfrac{a\sin(\alpha-30°)}{\sin(\alpha+30°)}$.

За лицето на сечението получаваме:

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{(BC+PQ)KN}{2} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{a\sin(\alpha-30°)}{\sin(\alpha+30°)}\right)\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+30°)} =$$

$$= \frac{a^2}{2}\frac{\left(\sin(\alpha+30°)+\sin(\alpha-30°)\right)\sin\alpha}{\sin^2(\alpha+30°)} = \frac{a^2\, 2.\sin\alpha\cos 30°\sin\alpha}{2\sin^2(\alpha+30°)} = \frac{a^2\sqrt{3}\sin^2\alpha}{2\sin^2(\alpha+30°)}. ▲$$

40. Паралелепипед, $BD_1 = d$, $\angle A_1BD_1 = \angle C_1BD_1 = \beta$. $V = ?, \varphi = ?$.



Нека $A_1C_1 \cap B_1D_1 = O$, тогава търсеният ъгъл е $\angle OBB_1 = \varphi$.

Триъгълниците A_1BD_1 и C_1BD_1 са еднакви (по хипотенуза и остър ъгъл) $\Rightarrow$ $A_1D_1 = D_1C_1$ $\Rightarrow$ $ABCD$ е квадрат.

Нека $AB = a$ и $AA_1 = c$.

От ΔA_1BD_1: $a = d\sin\beta$ и $BA_1 = d\cos\beta$.

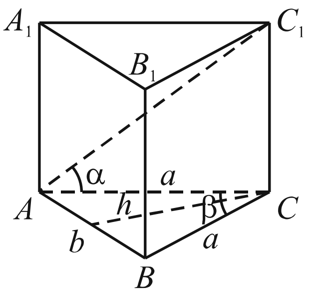
От ΔABA_1: $BA_1^{\,2} = a^2 + c^2$ $\Rightarrow$ $d^2\cos^2\beta = a^2 + c^2$,

$$c^2 = d^2\cos^2\beta - a^2 = d^2\cos^2\beta - d^2\sin^2\beta = d^2\cos 2\beta \quad\Rightarrow\quad c = d\sqrt{\cos 2\beta}.$$

$$V = a^2c = d^3\sin^2\beta\sqrt{\cos 2\beta}.$$

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{OB_1}{BB_1} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{c} = \frac{\sqrt{2}d\sin\beta}{2d\sqrt{\cos 2\beta}} = \frac{\sin\beta}{\sqrt{2\cos 2\beta}}.\blacktriangle$$

41. Призма с основа равнобедрен ΔABC с основа $AB = b$, $\angle ACB = \beta$ срещу основата и $\angle C_1AC = \alpha$, $V = ?$



Проекцията на AC_1 е AC $\Rightarrow$ $\angle C_1AC = \alpha$.

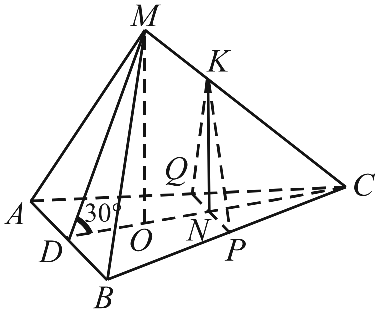
Нека $AC = BC = a$ и h е височината към основата $AB = b$ в ΔABC.

$$\frac{h}{\frac{b}{2}} = \mathrm{cotg}\frac{\beta}{2} \;\Rightarrow\; h = \frac{b\,\mathrm{cotg}\frac{\beta}{2}}{2}\;; \qquad \frac{\frac{b}{2}}{a} = \sin\frac{\beta}{2} \;\Rightarrow\; a = \frac{b}{2\sin\frac{\beta}{2}}.$$

$$\frac{CC_1}{a} = \mathrm{tg}\alpha,\; CC_1 = a\,\mathrm{tg}\alpha \;\Rightarrow\; CC_1 = \frac{b\,\mathrm{tg}\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}}.$$

За обема получаваме $V = \dfrac{bh}{2}CC_1 = \dfrac{b^3\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{cotg}\frac{\beta}{2}}{8\sin\frac{\beta}{2}}.\blacktriangle$

42. Правилна триъгълна пирамида $ABCM$. Двустенният ъгъл при основата е равен на $30°$ и основният ръб е a.



Нека P и Q са среди съответно на BC и AC, $CD \perp AB$, $D \in AB$, $CD \cap PQ = N$, $NK \perp (ABC), K \in CM$, $V_{QPCK} = ?$

От равностранния ΔABC последователно намираме:

$PQ = \frac{a}{2}$, $CN = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, $DO = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $CO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

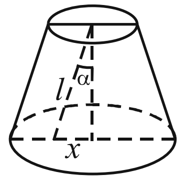
От ΔDOM: $\frac{MO}{DO} = \text{tg}30° \quad \Rightarrow \quad MO = \frac{a\sqrt{3}}{6}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{6}$.

От $\Delta MOC \sim \Delta KNC$: $\frac{MO}{KN} = \frac{CO}{CN}$, $KN = \frac{MO.CN}{CO}$, $KN = \frac{a}{6}\frac{a\sqrt{3}}{4}\frac{3}{a\sqrt{3}} = \frac{a}{8}$.

$$V_{QPCK} = \frac{1}{3}\frac{PQ.CN}{2}KN = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\frac{a}{2}\frac{a\sqrt{3}}{4}\frac{a}{8} = \frac{a^3\sqrt{3}}{384}.$$

Забележка. Може да се използва и, че $S_{QPC} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$.▲

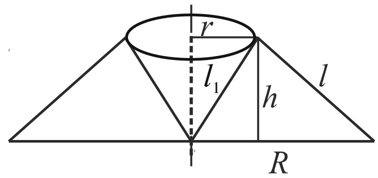
43. Пресечен конус, S, $\angle(l,h) = \alpha$, $\frac{r}{R} = \frac{2}{3}$, $r = ?$ $R = ?$



$\sin\alpha = \frac{R-r}{l}$ и $r = \frac{2R}{3} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{R}{3\sin\alpha}$.

$S = \pi l(R+r) = \pi\frac{R}{3\sin\alpha}\frac{5R}{3} \quad \Rightarrow \quad R = 3\sqrt{\frac{S\sin\alpha}{5\pi}} \quad \Rightarrow \quad r = 2\sqrt{\frac{S\sin\alpha}{5\pi}}$.▲

44. Правоъгълен триъгълник $3, 4, 5$.



$R = 5$, $l = 4$, $l_1 = 3$, $h = 2{,}4$, $r = \sqrt{3^2 - 2{,}4^2} = 1{,}8$.

Търсеният обем е $V = V_{\text{прес. конус } R,r,h} - V_{\text{конус } r,h}$.

Търсената повърхнина е $S = S_{\text{прес. конус } R,r,l} + S_{\text{конус } r,l_1} + S_{\text{кръг } R}$ (означенията са за околните повърхнини).

$$V_{\text{прес. конус } R,r,h} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi 2{,}4}{3}(25 + 1{,}8^2 + 5.1{,}8) = 29{,}792\pi.$$

$$V_{\text{конус } r,h} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi 3{,}24.2{,}4}{3} = 2{,}592\pi.$$

$$V = V_{\text{прес. конус } R,r,h} - V_{\text{конус } r,h} = 29{,}792\pi - 2{,}592\pi = 27{,}2\pi = \frac{136}{5}\pi \text{ cm}^3.$$

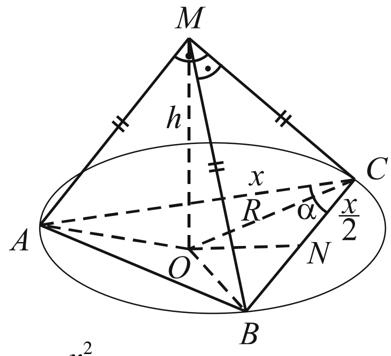
$$S_{\text{прес. конус } R,r,l} = \pi l(R+r) = \pi 4(5+1{,}8) = 27{,}2\pi,$$

$$S_{\text{конус } r,l_1} = \pi r l_1 = \pi 1{,}8.3 = 5{,}4\pi,$$

$$S_{\text{кръг } R} = \pi R^2 = 25\pi,$$

$$S = S_{\text{прес. конус } R,r,l} + S_{\text{конус } r,l_1} + S_{\text{кръг } R} = 27{,}2\pi + 5{,}4\pi + 25\pi = 57{,}6\pi = \frac{288}{5}\pi \text{ cm}^2.$$▲

45. Триъгълна пирамида $ABCM$ с обем V, $AM = BM = CM$, $\angle AMC = \angle BMC = 90°$, $\angle ACB = \alpha$, $AC = BC = x = ?$



$AM = BM = CM \quad \Rightarrow \quad M$ се проектира в центъра O на описаната около ΔABC окръжност и нека R е радиусът ѝ.

ΔOBC е равнобедрен с бедра $R \Rightarrow \dfrac{\frac{x}{2}}{R} = \cos\dfrac{\alpha}{2}$,

$R = \dfrac{x}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$.

От питагоровата теорема за ΔACM намираме $2MC^2 = x^2$, $MC^2 = \dfrac{x^2}{2}$.

Нека h е височина на пирамидата. От ΔOCM имаме:

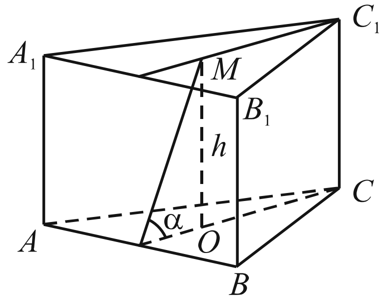
$$h^2 = MC^2 - R^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{x^2}{4}\frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{x^2}{4}\frac{\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{x}{2}\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

От ΔABC имаме $S_{ABC} = \dfrac{x^2\sin\alpha}{2}$. За обема на пирамидата получаваме:

$$V = \frac{1}{3}\frac{x^2\sin\alpha}{2}\frac{x}{2}\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{x^3}{6}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{x^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}{6},$$ откъдето

$$x = \sqrt[3]{\frac{6V}{\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}}}. ▲$$

46. Правилна триъгълна призма, h, α. $S_1 = ?$



Нека M е центърът на $A_1B_1C_1$ и N е средата на $AB = a$. Тогава $\angle MNC = \alpha$, $MO = h$.

$\dfrac{NO}{h} = \text{cotg}\alpha$, $NO = h\,\text{cotg}\alpha$.

От друга страна $NO = \dfrac{1}{3}CN = \dfrac{1}{3}\dfrac{a\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{6} \quad \Rightarrow$

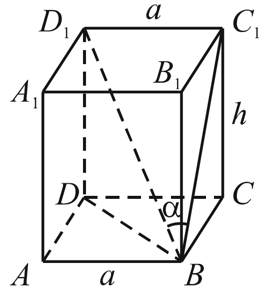
$\dfrac{a\sqrt{3}}{6} = h\,\text{cotg}\alpha$, $a = 2\sqrt{3}\,h\,\text{cotg}\alpha$.

$$S_1 = 3ah + 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 3.2\sqrt{3}\,h\,\text{cotg}\alpha.h + 2\frac{(2\sqrt{3}\,h\,\text{cotg}\alpha)^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}\,h^2\,\text{cotg}\alpha\left(1 + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) =$$

$$= 6\sqrt{3}\,h^2\,\text{cotg}\alpha\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)}{\sin\alpha} = 6\sqrt{3}\,h^2\,\text{cotg}\alpha\frac{\sqrt{2}\sin(\alpha + 45°)}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{6\sqrt{6}\,h^2\,\text{cotg}\alpha\,\sin(\alpha + 45°)}{\sin\alpha}. ▲$$

47. Правилна четириъгълна призма с основен ръб a и ъгъл α между телесен диагонал и диагонал на околна стена. $V = ?$



Нека основният ръб на призмата е a и височината ѝ е h. По условие $\angle D_1BC_1 = \alpha$.

Прилагаме косинусовата теорема за ΔD_1BC_1, в който $D_1C_1 = a$, $BC_1^2 = h^2 + a^2$, $BD_1^2 = h^2 + 2a^2$ и $\angle D_1BC_1 = \alpha$:

$$a^2 = BC_1^2 + BD_1^2 - 2.BC_1.BD_1.\cos\alpha \quad \Leftrightarrow$$

$$a^2 = h^2 + a^2 + h^2 + 2a^2 - 2\sqrt{(h^2+a^2)(h^2+2a^2)}\cos\alpha .$$

Полагаме $h^2 + a^2 = y > 0$.

$$a^2 = 2y + a^2 - 2\sqrt{y(y+a^2)}\cos\alpha, \quad y = \sqrt{y(y+a^2)}\cos\alpha, \quad y^2 = y(y+a^2)\cos^2\alpha,$$

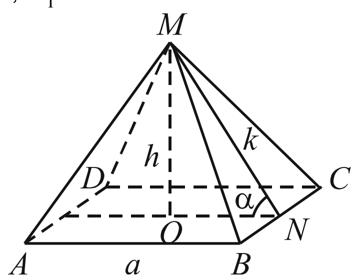
$$y = (y+a^2)\cos^2\alpha, \quad y(1-\cos^2\alpha) = a^2\cos^2\alpha, \quad y = \frac{a^2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

Сега от $h^2 + a^2 = y$ намираме h:

$$h^2 = y - a^2, \quad h^2 = \frac{a^2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - a^2 = a^2\,\frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = a^2\,\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}, \quad h = a\frac{\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}.$$

За обема получаваме $V = \dfrac{a^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$.▲

48. Правилна четириъгълна пирамида, V, $\angle(\text{ок.стена, основа}) = \alpha$, $S_1 = ?$



От ΔONM намираме $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{h}{\frac{a}{2}}$, $\quad h = \dfrac{a\operatorname{tg}\alpha}{2}$.

Тогава $V = \dfrac{a^2h}{3} = \dfrac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{6}$, откъдето $a = \sqrt[3]{\dfrac{6V}{\operatorname{tg}\alpha}}$.

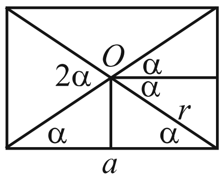
От ΔONM намираме $\cos\alpha = \dfrac{\frac{a}{2}}{k}$, $\quad k = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$.

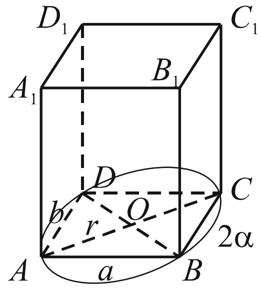
За повърхнината получаваме:

$$S_1 = \frac{4ak}{2} + a^2 = \frac{2a^2}{2\cos\alpha} + a^2 = a^2\left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1\right) = \frac{a^2\,2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}\sqrt[3]{\frac{36V^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}} =$$

$$= \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}\,\frac{\sqrt[3]{36V^2\operatorname{tg}\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{36V^2\operatorname{tg}\alpha}}{\sin\alpha} = \frac{2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{36V^2\operatorname{tg}\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{36V^2\operatorname{tg}\alpha}.▲$$

49. Правоъгълен паралелепипед, S, $AC \cap BD = O$ окръжност $k(O,r)$, $AB = a > BC = b$, $\overset{\frown}{BC} = 2\alpha$, $V = ?$.





ΔBAC: $\angle BAC = \alpha$, $\frac{a}{2r} = \cos\alpha$, $a = 2r\cos\alpha$;

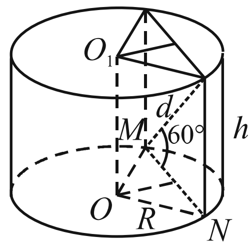
$\frac{b}{2r} = \sin\alpha$, $b = 2r\sin\alpha$.

$S = 2(a+b)h$, $S = 2(2r\cos\alpha + 2r\sin\alpha)h$,

$h = \frac{S}{4r(\sin\alpha + \cos\alpha)} = \frac{S}{4r\sqrt{2}\cos(45^\circ - \alpha)}$.

$$V = abh = 4r^2 \sin\alpha\cos\alpha\frac{S}{4r\sqrt{2}\cos(45^\circ-\alpha)} = \frac{\sqrt{2}\,S\,r\sin 2\alpha}{4\cos(45^\circ-\alpha)}.\blacktriangle$$

50. Цилиндър, сечение, успоредно на височината, дъга α, диагонал d, $\angle(d,\text{осн.}) = 60^\circ$. $V = ?$



В равнината на сечението: $\frac{h}{d} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $h = \frac{d\sqrt{3}}{2}$, и MN е катет срещу 30° $\Rightarrow$ $MN = \frac{d}{2}$.

Окръжността е разделена на две части, така че по-малката дъга е α $\Rightarrow$ $\angle MON = \alpha$. Тогава в равнината на основата: $\frac{\frac{MN}{2}}{R} = \sin\frac{\alpha}{2}$,

$R = \frac{MN}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{d}{4\sin\frac{\alpha}{2}}$.

$$V = \pi R^2 h = \pi\frac{d^2}{16\sin^2\frac{\alpha}{2}}\frac{d\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi\sqrt{3}d^3}{32\sin^2\frac{\alpha}{2}}.\blacktriangle$$

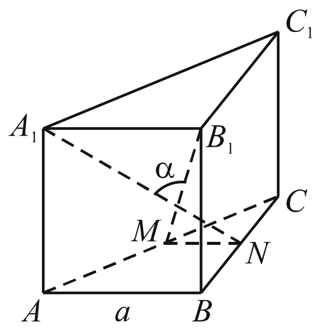
51. Квадрат, цилиндър, $V = 8$.

Обемът на получения при завъртането на квадрата цилиндър, е $V = \pi a^2 a = \pi a^3 = 8$, откъдето намираме, че страната на дадения квадрат е $a^3 = \frac{8}{\pi}$.

Обемът на цилиндъра с осно сечение дадения квадрат е $V_1 = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.a = \frac{\pi a^3}{4} = \frac{\pi 8}{4\pi} = 2.\blacktriangle$

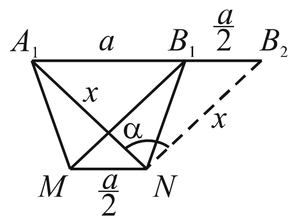
52. Правилна триъгълна призма, α, a, $V=?$

Нека M и N са среди съответно на AC и BC. Ще отбележим, че от $MN \parallel AB \parallel A_1B_1 \;\Rightarrow\; A_1N$ и B_1M лежат в една и съща равнина и нека $A_1N \cap B_1M = O$, тогава $\angle MON = \alpha$.



A_1B_1NM е равнобедрен трапец ($\Delta AMA_1 \cong \Delta BNB_1$).

Нека $A_1N = B_1M = x$. Построяваме точка B_2 на правата A_1B_1, така че $NB_2 \parallel MB_1 \;\Rightarrow\; \Delta A_1NB_2$ е равнобедрен с основа $A_1B_2 = a+\dfrac{a}{2}=\dfrac{3a}{2}$, бедра x и ъгъл между бедрата $\alpha \;\Rightarrow\; \dfrac{3a}{4x}=\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $x=\dfrac{3a}{4\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.



От ΔMBB_1: $BM^2+BB_1^2=x^2 \;\Leftrightarrow\; \left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+h^2=\left(\dfrac{3a}{4\sin\dfrac{\alpha}{2}}\right)^2$.

$$h^2=\frac{9a^2}{16\sin^2\frac{\alpha}{2}}-\frac{3a^2}{4}=\frac{3a^2}{4}\left(\frac{3}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}-1\right)=\frac{3a^2}{4}\cdot\frac{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Ще преобразуваме израза $3-4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$ в произведение.

$$3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}=4\left(\frac{3}{4}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$$

$$=4\left(\sin 60^\circ-\sin\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin 60^\circ+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=4.2\cos\frac{60^\circ+\frac{\alpha}{2}}{2}\,\sin\frac{60^\circ-\frac{\alpha}{2}}{2}.2\sin\frac{60^\circ+\frac{\alpha}{2}}{2}\,\cos\frac{60^\circ-\frac{\alpha}{2}}{2}$$

В последния израз групираме първия и третия множител и втория и четвъртия и получаваме:

$$3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}=4\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

Тогава $h^2=\dfrac{3a^2 4\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{16\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, $\quad h=\dfrac{a\sqrt{3}\sqrt{\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

$$\Rightarrow V=\frac{a^2\sqrt{3}\,a\sqrt{3}\sqrt{\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}}{4.2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{3a^3\sqrt{\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}}{8\sin\frac{\alpha}{2}}.\blacktriangle$$

53. Призма, c, α, β, $V_{ABCC_1} = ?$

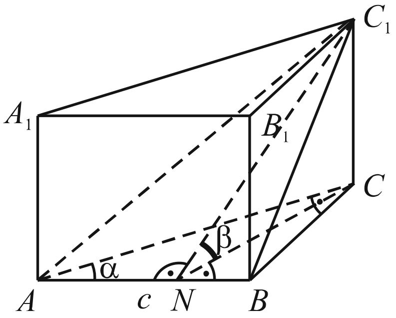
Нека $\angle BAC = \alpha$ и $AB = c \Rightarrow AC = c\cos\alpha$ и $BC = c\sin\alpha$.

Нека $CN \perp AB \quad \Rightarrow \quad CN = c\sin\alpha\cos\alpha = \dfrac{c\sin 2\alpha}{2}$.

От ΔNCC_1: $\dfrac{CC_1}{CN} = \mathrm{tg}\beta \quad \Rightarrow \quad CC_1 = \mathrm{tg}\beta . CN = \dfrac{c\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{2}$.

$S_{ABC} = \dfrac{c\,CN}{2} = \dfrac{c^2\sin 2\alpha}{4}$.

$V = \dfrac{1}{3}S_{ABC}.CC_1 = \dfrac{c^2\sin 2\alpha\ .c\sin 2\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{3.4.2} = \dfrac{c^3\sin^2 2\alpha\,\mathrm{tg}\beta}{24}$.▲



54. Правилна триъгълна призма, a, α, $S = ?$, $S_{\text{сеч.}} = ?$

Нека M е средата на CC_1 и N е средата на AB. Сечението е ΔABM и $\angle MNC = \alpha$.

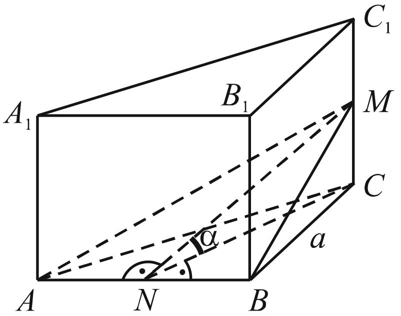
$S_{\text{пр.}} = S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и $S_{\text{пр.}} = S_{\text{сеч.}}\cos\alpha \quad \Rightarrow$

$S_{\text{сеч.}} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$.

От ΔNCM: $\dfrac{MC}{CN} = \mathrm{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad MC = CN\,\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\mathrm{tg}\alpha$

$\Rightarrow \quad h = CC_1 = 2MC = a\sqrt{3}\mathrm{tg}\alpha$.

$S = 3ah = 3\sqrt{3}a^2\mathrm{tg}\alpha$.▲



55. Нека $AC \cap BD = M$. ΔABD е равностранен $\quad \Rightarrow \quad O \in AC$, $OM = r$, $AM = MC = 3r$. $AB = 2\sqrt{3}r$.

$S_{ABCD} = \dfrac{AC.BD}{2} = \dfrac{6r.2\sqrt{3}r}{2} = 6\sqrt{3}r^2$.

По условие $\angle AMF = 2\angle ACF$ и тъй като $\angle AMF$ е външен за ΔMCF, то $\angle MFC = \angle MCF \quad \Rightarrow \quad FM = CM = 3r$.

От ΔOMF: $OF = \sqrt{FM^2 - OM^2} = \sqrt{9r^2 - r^2} = 2\sqrt{2}r \quad \Rightarrow$

$V = \dfrac{1}{3}6\sqrt{3}r^2 2\sqrt{2}r = 4\sqrt{6}r^3$.▲