Общи задачи
Вероятности и анализ на данни

1. Пълната група събития изчерпва възможностите за избор на магазин.

Магазин 1	Магазин 2
5 стандартни 3 малки	3 стандартни 2 малки

H_1={избран е първият магазин}

H_2={избран е вторият магазин}

$\Rightarrow\ P(H_1)=P(H_2)=\dfrac{1}{2}$.

Нека A={гражданинът купува две стандартни клавиатури}.

Търси се апостериорната вероятност $P(H_2 \mid A)$.

Ще използваме формулата на Бейс.
Пресмятаме:

Вероятността на A при хипотезата H_1 е: $P(A \mid H_1)=\dfrac{C_5^2}{C_8^2}=\dfrac{5}{14}$.

Вероятността на A при хипотезата H_2 е: $P(A \mid H_2)=\dfrac{C_3^2}{C_5^2}=\dfrac{3}{10}$.

$$\Rightarrow\ P(H_2 \mid A)=\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{14}+\frac{3}{10}\right)}=\frac{21}{46}.$$

2. Преди откриване на сезона имаме 70 посетени обекта и 30 непосетени.

С откриване на туристическия сезон свързваме пълната група от събития, като изчерпваме всички възможности:

H_1={посетили са 3 непосетени обекта}

H_2={посетили са 2 непосетени обекта и 1 посетен}

H_3={посетили са 1 непосетен обект и 2 посетени}

H_4={посетили са 3 посетени обекта}

$P(H_1)=\dfrac{C_{30}^3}{C_{100}^3}$

$P(H_2)=\dfrac{C_{30}^2C_{70}^1}{C_{100}^3}$

$P(H_3)=\dfrac{C_{30}^1C_{70}^2}{c_{100}^3}$

$P(H_4)=\dfrac{C_{70}^3}{C_{100}^3}$

Нека A={при следващ избор избират 2 непосещавани обекта}.

За намиране вероятността на събитието A ще приложим формулата за пълната вероятност.

При хипотезата H_1 имаме 73 посетени обекта и 27 непосетени $\Rightarrow$ $P(A\,|\,H_1)=\dfrac{C_{27}^2}{C_{100}^2}$.

При хипотезата H_2 имаме 72 посетени обекта и 28 непосетени $\Rightarrow$ $P(A\,|\,H_2)=\dfrac{C_{28}^2}{C_{100}^2}$.

При хипотезата H_3 имаме 71 посетени обекта и 29 непосетени $\Rightarrow$ $P(A\,|\,H_3)=\dfrac{C_{29}^2}{C_{100}^2}$.

При хипотезата H_4 имаме 70 посетени обекта и 30 непосетени $\Rightarrow$ $P(A\,|\,H_4)=\dfrac{C_{30}^2}{C_{100}^2}$.

Тогава

$$P(A)=\frac{C_{30}^3C_{27}^2+C_{30}^2C_{70}^1C_{28}^2+C_{30}^1C_{70}^2C_{29}^2+C_{70}^3C_{30}^2}{C_{100}^3C_{100}^2}.$$

3. Преди месец януари имаме 6 прочетени и 14 непрочетени книги.

Пълна група от събития избираме, като изброим възможностите за избора на трите книги, които прочели през януари.

H_1={Избрани са 3 прочетени книги}

H_2={Избрани са 2 прочетени книги и 1 непрочетена}

H_3={Избрани са 1 прочетена книга и 2 непрочетени}

H_4={Избрани са 3 непрочетени книги}

$$P(H_1)=\frac{C_6^3}{C_{20}^3}=\frac{20}{1140}$$

$$P(H_2)=\frac{C_6^2C_{14}^1}{C_{20}^3}=\frac{210}{1140}$$

$$P(H_3)=\frac{C_6^1C_{14}^2}{C_{20}^3}=\frac{546}{1140}$$

$$P(H_4)=\frac{C_{14}^3}{C_{20}^3}=\frac{364}{1140}$$

Нека A={през месец февруари учениците избират 2 нечетени книги}.

За намиране вероятността на събитието A ще приложим формулата за пълната вероятност.

При хипотезата H_1 имаме 14 непрочетени книги и 6 прочетени $\Rightarrow$ $P(A\,|\,H_1)=\dfrac{C_{14}^2}{C_{20}^2}=\dfrac{91}{190}$.

При хипотезата H_2 имаме 13 непрочетени книги и 7 прочетени $\Rightarrow$ $P(A\,|\,H_2)=\dfrac{C_{13}^2}{C_{20}^2}=\dfrac{78}{190}$.

При хипотезата H_3 имаме 12 непрочетени книги и 8 прочетени $\Rightarrow$ $P(A\,|\,H_3)=\dfrac{C_{12}^2}{C_{20}^2}=\dfrac{66}{190}$.

При хипотезата H_4 имаме 11 непрочетени книги и 9 прочетени $\Rightarrow$ $P(A\,|\,H_4)=\dfrac{C_{11}^2}{C_{20}^2}=\dfrac{55}{190}$.

Тогава $P(A)=\dfrac{1}{1140.190}\left(20.91+210.78+546.66+364.55\right)\approx 0,34$.

4. Стойностите, които приема случайната величина X са $10, 20, 50, 100, 200$.

Ученикът има общо 12 монети в джоба си.

а) Законът за разпределение е

x_i	10	20	50	100	200
p_i	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

б) Функцията на разпределение е:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 10 \\ \frac{2}{12} & 10 < x \le 20 \\ \frac{5}{12} & 20 < x \le 50 \\ \frac{9}{12} & 50 < x \le 100 \\ \frac{11}{12} & 100 < x \le 200 \\ 1 & 200 < x \end{cases}.$$

в) Изчисляване на математическото очакване.

$$EX = \frac{10.2+20.3+50.4+100.2+200.1}{12} = \frac{680}{12} = \frac{170}{3} \approx 56,67$$

г) За изчисляване на дисперсията попълваме таблицата:

x_i	10	20	50	100	200
p_i	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$
x_i^2	100	400	2500	10000	40000

$$EX^2 = \frac{2.100+3.400+4.2500+2.10000+1.40000}{12} = \frac{71400}{12} = 5950$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 5950 - \left(\frac{170}{3}\right)^2 = \frac{53550-28900}{9} = \frac{24650}{9} = 2738,(8).$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{24650}}{3} \approx 52,33.$$

5. Шахматистът е играл с 10 от участниците в клуба и с 5 не е играл.

Пълната група събития изчерпва възможностите за игра с трима случайно избрани един ден.

H_1 ={играе с трима, с които вече е играл}

H_2 ={играе с двама, с които вече е играл и с един, с който не е играл}

H_3 ={играе с един, с който вече е играл и с двама, с които не е играл}

H_4 ={играе с трима, с които не е играл}

$$P(H_1)=\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}$$

$$P(H_2)=\frac{C_{10}^2C_5^1}{C_{15}^3}$$

$$P(H_3)=\frac{C_{10}^1C_5^2}{C_{15}^3}$$

$$P(H_4)=\frac{C_5^3}{C_{15}^3}$$

Нека A={при следващо посещение играе с трима, с които вече е играл}.

За намиране вероятността на събитието A ще приложим формулата за пълната вероятност.

При хипотезата H_1 имаме, шахматистът вече е играл с 10 и не е играл с 5 от участниците $\Rightarrow$

$$P(A\mid H_1)=\frac{C_{10}^3}{C_{15}^3}.$$

При хипотезата H_2 имаме, шахматистът вече е играл с 11 и не е играл с 4 от участниците $\Rightarrow$

$$P(A\mid H_2)=\frac{C_{11}^3}{C_{15}^3}$$

При хипотезата H_3 имаме, шахматистът вече е играл с 12 и не е играл с 3 от участниците $\Rightarrow$

$$P(A\mid H_3)=\frac{C_{12}^3}{C_{15}^3}$$

При хипотезата H_4 имаме, шахматистът вече е играл с 13 и не е играл с 2 от участниците $\Rightarrow$

$$P(A\mid H_4)=\frac{C_{13}^3}{C_{15}^3}$$

Тогава:

$$P(A)=\frac{1}{C_{15}^3C_{15}^3}\left(C_{10}^3C_{10}^3+C_{10}^2C_5^1C_{11}^3+C_{10}^1C_5^2C_{12}^3+C_5^3C_{13}^3\right).$$

6. Имаме 3-ма братя и 2 сестри.

Пълната група изчерпва възможностите за първия избор на дете:

H_1={първото избрано дете е сестра}

H_2={първото избрано дете е брат}

$$P(H_1)=\frac{2}{5}$$

$$P(H_2)=\frac{3}{5}$$

Нека A={второто избрано дете е брат}.

Търсим $P(H_1\mid A)$.

Намираме

$$P(A \mid H_1) = \frac{3}{4}$$

$$P(A \mid H_2) = \frac{2}{4}$$

Прилагаме формулата на Бейс и получаваме:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{\frac{2}{5}.\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}.\frac{3}{4} + \frac{3}{5}.\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}.$$

7. При хвърляне на два зара в 11 от случаите поне на единия се пада 1.

$\Rightarrow \; p_1 = \frac{11}{36}$.

Пада се 2 поне на единия, а на другия число не по-малко от 2 (т.е. число по-голямо или равно на 2) в 9 случая.

$\Rightarrow \; p_2 = \frac{9}{36}$ и $p_3 = \frac{16}{36}$.

Функцията на разпределение е $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{11}{36} & 1 < x \leq 2 \\ \frac{20}{36} & 2 < x \leq 3 \\ 1 & 3 < x \end{cases}$

Попълваме таблицата:

x_i	1	2	3
p_i	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{16}{36}$
x_i^2	1	4	9

$$EX = \frac{1.11 + 2.9 + 3.16}{36} = \frac{77}{36} \approx 2{,}14$$

$$EX^2 = \frac{1.11 + 4.9 + 9.16}{36} = \frac{191}{36}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{191}{36} - \frac{77^2}{36^2} = \frac{947}{1296} \approx\sim 0{,}73$$

8. Последователно пресмятаме:

$$EX = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$EX^2 = \frac{1+4+9+16+25}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 11 - 9 = 2$$

$$\sigma = \sqrt{2}$$

9. Имаме $X \in Bi(12;\ 0,02)$

$\Rightarrow\ EX = np = 12.0,02 = 0,24$

$DX = npq = 12.0,02.0,98 \approx 0,24$

Най-вероятната стойност е $m = [(n+1)p] = [13.0,02] = [0,26] = 0$.

10. Разглеждаме пълната група събития:

H_1={изделието е произведено в първия цех}

H_2={изделието е произведено във втория цех}

По условие $P(H_1) = \dfrac{3}{5}$, $P(H_2) = \dfrac{2}{5}$.

Нека A={избраното изделие е от първо качество}.

$P(A \mid H_1) = 0,7$ и $P(A \mid H_2) = 0,8$.

По формулата на Бейс намираме:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{\frac{3}{5}.0,7}{\frac{3}{5}.0,7 + \frac{2}{5}.0,8} = \frac{2,1}{2,1+1,6} = \frac{21}{37} \approx 0,57$$

11. Имаме $a = 6$, $\sigma = 2$.

а) между 4 cm и 6 cm;

Трансформираме стойността 4 в z стойност $z = \dfrac{x-a}{\sigma} = \dfrac{4-6}{2} = -1$.

На $+1$ в таблицата съответства площ 0,3413.

Тъй като 6 е средната, на нея ѝ съответства $z = 0$.

$\Rightarrow$ вероятността произволно избран домат да има диаметър между 4 и 6 cm е 0,3413.

б) между 5 cm и 7 cm

Трансформираме стойността 5 в z стойност $z = \dfrac{x-a}{\sigma} = \dfrac{5-6}{2} = -0,5$.

$+0,5$ в таблицата съответства площ 0,1915.

Трансформираме стойността 7 в z стойност $z = \dfrac{x-a}{\sigma} = \dfrac{7-6}{2} = 0,5$.

$+0,5$ в таблицата съответства площ 0,1915.

Двете площи са разположени от двете страни на средната $\Rightarrow$ вероятността произволно избран домат да има диаметър между 5 и 6 cm е $0,1915 + 0,1915 = 0,383$

в) по-голям от 8 cm

Трансформираме стойността 8 в z стойност $z = \dfrac{x-a}{\sigma} = \dfrac{8-6}{2} = 1$.

На 1 в таблицата съответства площ 0,3413.

$\Rightarrow$ Вероятността диаметърът да е по-голям от 8 е $0,5 - 0,3413 = 0,1587$.

г) по-малък от 4 cm

Вероятността диаметърът да е по-малък от 4 cm е $0,5 - 0,3413 = 0,1587$.

12. Задачата е за проверка на хипотеза за разлика между средни.

1. $H_0: \ m=1$, $H_a: \ m<1$.

2. Равнище на значимост $\alpha = 0,05$.

3. Критичната област е лявостранна и $z_\alpha = -1,64$.

4. Осигуряване на необходимата информация:

$$m=1, \ \sigma = 0,05, \ n=100, \ \overline{x} = 0,992$$

5. Изчисляване на емпиричната характеристика

$$z_e = \frac{\overline{x}-m}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{0,992-1}{0,05}\sqrt{100} = -1,6.$$

6. Вземане на решение: $|-1,6|<|1,64|$ $\Rightarrow$ няма основание да се отхвърли H_0.

13. Задачата е за проверка на хипотеза за разлика между относителни дялове.

1. $H_0: \ p=0,05$, $H_a: \ p>0,05$.

2. Равнище на значимост $\alpha = 0,05$.

3. Критичната област е дясностранна и $z_\alpha = 1,64$.

4. Осигуряване на необходимата информация: $n=100$, $p=0,05$, $\hat{p} = \frac{6}{100} = 0,06$.

5. Изчисляване на емпиричната характеристика

$$z_e = \frac{p-\hat{p}}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n} = \frac{0,05-0,06}{\sqrt{0,05.0,95}}\sqrt{100} \approx -0,46.$$

6. Вземане на решение:

Тъй като $|-0,46|<|1,64|$ $\Rightarrow$ няма основание да се отхвърли H_0.

14. По условие зависимостта е линейна и търсим регресионно уравнение от вида $\hat{y} = b_0 + b_1 x$.

Съставяме работна таблица.

	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
A	37	34	1369	1258
B	37	36	1369	1332
C	26	18	676	468
D	16	16	256	256
E	13	13	169	169
	$S_x = 129$	$S_y = 117$	$S_{x^2} = 3839$	$S_{xy} = 3483$

$$\left| \begin{array}{l} S_y = nb_0 + b_1 S_x \\ S_{xy} = b_0 S_x + b_1 S_{x^2} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 117 = 5b_0 + 129b_1 \\ 3483 = 129b_0 + 3839b_1 \end{array} \right. \Leftrightarrow b_0 = -\frac{72}{1277}, \ b_1 = \frac{1161}{1277}.$$

Регресионното уравнение е

$\hat{y} = -\frac{72}{1277} + \frac{1161}{1277}x$ или $1277\hat{y} = -72 + 1161x$.

При $x=50$ $\hat{y} \approx 45$.

15. Задачата е за проверка на хипотеза за разлика между средни.

1. $H_0:\ m = 21$, $H_a:\ m \neq 21$.

2. Равнище на значимост $\alpha = 0,05$.

3. Критичната област е двустранна и $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

4. Осигуряване на необходимата информация:

$$m = 21,\ \sigma = 1,2,\ n = 40,\ \overline{x} = 20,7$$

5. Изчисляване на емпиричната характеристика:

$$z_e = \frac{\overline{x} - m}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{20,7 - 21}{1,2}\sqrt{40} = -1,58.$$

6. Вземане на решение: $|-1,58| < |1,96|$ $\Rightarrow$ няма основание да се отхвърли H_0.

16. Задачата е за проверка на хипотеза за разлика между средни.

1. $H_0:\ m = 80$, $H_a:\ m < 80$.

2. Равнище на значимост $\alpha = 0,05$.

3. Критичната област е лявостранна и $z_\alpha = -1,64$.

4. Осигуряване на необходимата информация:

$$m = 80,\ \sigma = 2,5,\ n = 36,\ \overline{x} = 79,3$$

5. Изчисляване на емпиричната характеристика:

$$z_e = \frac{\overline{x} - m}{\sigma}\sqrt{n} = \frac{79,3 - 80}{2,5}\sqrt{36} = -1,68.$$

6. Вземане на решение: $|-1,68| > |-1,64|$ $\Rightarrow$ H_0 се отхвърля.

17. Братята са играли на 5 от игрите и на 9 не са играли.

Пълната група събития изчерпва възможностите за игра с две случайно избрани игри:

H_1={играли са и на двете игри}

H_2={играли са едната игра и не се играли на другата}

H_3={не са играли и на двете игри }

$$P(H_1) = \frac{C_5^2}{C_{14}^2} = \frac{10}{91}$$

$$P(H_2) = \frac{C_5^1 C_9^1}{C_{14}^2} = \frac{45}{91}$$

$$P(H_3) = \frac{C_9^2}{C_{14}^2} = \frac{36}{91}$$

Нека A={при следващ случаен избор не са играли и на трите игри}.

За намиране вероятността на събитието A ще приложим формулата за пълната вероятност.

При хипотезата H_1 имаме, че братята са играли на 5 от игрите и на 9 не са играли $\Rightarrow$

$$P(A\,|\,H_1)=\frac{C_9^3}{C_{14}^3}=\frac{84}{364}.$$

При хипотезата H_2 имаме, че братята са играли на 6 от игрите и на 8 не са играли $\Rightarrow$

$$P(A\,|\,H_2)=\frac{C_8^3}{C_{14}^3}=\frac{56}{364}$$

При хипотезата H_3 имаме, че братята са играли на 7 от игрите и на 7 не са играли $\Rightarrow$

$$P(A\,|\,H_3)=\frac{C_7^3}{C_{14}^3}=\frac{35}{364}$$

Тогава:

$$P(A)=\frac{1}{91.364}\left(10.84+45.56+36.35\right)=\frac{4620}{91.364}=\frac{1155}{91.91}\approx 0,14.$$

18. Задачата е за проверка на хипотеза за разлика между средни.

1. $H_0:\ m=6$, $H_a:\ m>6$.

2. Равнище на значимост $\alpha=0,05$.

3. Критичната област е дясностранна и $z_\alpha=1,64$.

4. Осигуряване на необходимата информация:

$$m=6,\ \sigma=0,7,\ n=120,\ \overline{x}=6,1$$

5. Изчисляване на емпиричната характеристика:

$$z_e=\frac{\overline{x}-m}{\sigma}\sqrt{n}=\frac{6,1-6}{0,7}\sqrt{120}=1,56.$$

6. Вземане на решение: $|1,56|<|1,64|$ $\Rightarrow$ няма основание да се отхвърли H_0.

19. Задачата е за проверка на хипотеза за разлика между относителни дялове.

1. $H_0:\ p=0,9$, $H_a:\ p<0,9$.

2. Равнище на значимост $\alpha=0,05$.

3. Критичната област е лявостранна и $z_\alpha=-1,64$.

4. Осигуряване на необходимата информация: $n=54$, $p=0,9$, $\hat{p}=\frac{46}{54}=0,85$.

5. Изчисляване на емпиричната характеристика:

$$z_e=\frac{p-\hat{p}}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}=\frac{0,9-0,85}{\sqrt{0,9.0,1}}\sqrt{54}=1,2.$$

6. Вземане на решение: $|1,2|<|1,64|$ $\Rightarrow$ няма основание да се отхвърли H_0.

20. Задачата може да се разглежда като 90 бернулиеви опита, в които събитието успех „ученикът закъснява за училище” настъпва с постоянна вероятност $0{,}03$ и има само две възможности – ученикът е закъснял или ученикът не е закъснял.

$\Rightarrow$ имаме бернулиево разпределение $Bi(90;\ 0{,}03)$.

Най-вероятният брой на успехите (закъсненията на ученика) е:

$m = [(n+1)p] = [91.0{,}03] = [2{,}73] = 2$.

Тогава най-вероятният брой закъснения на ученика за 90 дни е 2.