2.1. Разпределение на дискретна крайна случайна величина. Примери на разпределения. Функция на разпределение

1) Случайна величина

1. Разглеждаме събитията:

5 бели 3 черни

A_0= {извадени са 0 бели топки}
A_1= {извадена е 1 бяла топка}
A_2= {извадени са 2 бели топки}
A_3= {извадени са 3 бели топки}

Изваждат се 3 топки. Тогава:

Пресмятаме вероятностите:

A_0= {0 бели топки} $=0$ бели и 3 черни $p_0=\dfrac{C_3^3}{C_8^3}=\dfrac{1}{56}$

A_1= {1 бяла топка} = 1 бяла и 2 черни $p_1=\dfrac{C_5^1C_3^2}{C_8^3}=\dfrac{15}{56}$

A_2= {2 бели топка} = 2 бели и 1 черна $p_2=\dfrac{C_5^2C_3^1}{C_8^3}=\dfrac{30}{56}$

A_3= {3 бели топки} =3 бели и 0 черни $p_3=\dfrac{C_5^3}{C_8^3}=\dfrac{10}{56}$

Законът за разпределението на X, записан таблично, е

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{1}{56}$	$\dfrac{15}{56}$	$\dfrac{30}{56}$	$\dfrac{10}{56}$

2. Разглеждаме събитията:

4 бели 4 черни

A_0= {извадени са 0 бели топки}
A_1= {извадена е 1 бяла топка}
A_2= {извадени са 2 бели топки}
A_3= {извадени са 3 бели топки}

Изваждат се 3 топки. Тогава:

Пресмятаме вероятностите:

A_0= {0 бели топки} = 0 бели и 3 черни $p_0=\dfrac{C_4^3}{C_8^3}=\dfrac{4}{56}$

A_1= {1 бяла топка} = 1 бяла и 2 черни $p_1=\dfrac{C_4^1C_4^2}{C_8^3}=\dfrac{24}{56}$

A_2= {2 бели топка} = 2 бели и 1 черна $p_2=\dfrac{C_4^2C_4^1}{C_8^3}=\dfrac{24}{56}$

A_3= {3 бели топка} =3 бели и 0 черни $p_0=\dfrac{C_4^3}{C_8^3}=\dfrac{4}{56}$

Законът за разпределението на X, записан таблично, е

X	0	1	2	3
P	$\dfrac{4}{56}$	$\dfrac{24}{56}$	$\dfrac{24}{56}$	$\dfrac{4}{56}$

2) Функция на разпределение

3.

Стойностите на случайната величина X са $\{3,6,9,12,15,18\}$, като тя приема всяка стойност с вероятност $\frac{1}{6}$. Разпределението на случайната величина е

X	3	6	9	12	15	18
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Да обобщим получените резултати за $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases} 0, \text{ при } x\le 3 \\ \frac{1}{6}, \text{ при } 3<x\le 6 \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}, \text{ при } 6<x\le 9 \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}, \text{ при } 9<x\le 12 \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{4}{6}, \text{ при } 12<x\le 15 \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}, \text{ при } 15<x\le 18 \\ \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1, \text{ при } 18<x \end{cases}$$

4.

X	6	10	12
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Функцията на разпределение е:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 6 \\ \frac{1}{3} & 6<x\le 10 \\ \frac{2}{3} & 10<x\le 12 \\ 1 & 12<x \end{cases}$$

5. Разглеждаме събитията:

A_0= {извадени са 0 бели топки}

A_1= {извадена е 1 бяла топка}

A_2= {извадени са 2 бели топки}

A_3= {извадени са 3 бели топки}

Кутия 1	Кутия 2
3 бели	4 бели
2 черни	3 черни

От първата кутия се изважда една топка, а от втората – две. Тогава:

A_0= {0 бели топки} = 1 черна от първата кутия и 2 черни от втората кутия

A_1= {1 бяла топка} = 1 бяла от първата кутия и 2 черни от втората кутия
или
1 черна от първата кутия и 1 бяла и 1 черна от втората кутия

A_2= {2 бели топки} = 1 бяла от първата кутия и 1 бяла и 1 черна от втората кутия
или
1 черна от първата кутия и 2 бели от втората кутия

A_3= {3 бели топки} = 1 бяла от първата кутия и 2 бели от втората кутия

Изчисляваме вероятностите:

$$p_0 = \frac{2}{5}.\frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{6}{105}$$

$$p_1 = \frac{3}{5}.\frac{C_3^2}{C_7^2} + \frac{2}{5}.\frac{C_4^1 C_3^1}{C_7^2} = \frac{33}{105}$$

$$p_2 = \frac{3}{5}.\frac{C_4^1 C_3^1}{C_7^2} + \frac{2}{5}.\frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{48}{105}$$

$$p_3 = \frac{3}{5}.\frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{18}{105}.$$

Функцията на разпределение е:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \dfrac{6}{105} & 0 < x \le 1 \\ \dfrac{39}{105} & 1 < x \le 2 \\ \dfrac{87}{105} & 2 < x \le 3 \\ 1 & 3 < x \end{cases}$$

Законът за разпределение е:

X	0	1	2	3
P	$\frac{6}{105}$	$\frac{33}{105}$	$\frac{48}{105}$	$\frac{18}{105}$

6. Разглеждаме събитията:

A_0= {извадени са 0 бели топки}

A_1= {извадена е 1 бяла топка}

A_2= {извадени са 2 бели топки}

Кутия 1	Кутия 2
7 бели 5 черни	3 бели 9 черни

От първата кутия се изважда една топка и от втората – една. Тогава:

A_0= {0 бели топки} = 1 черна от първата кутия и 1 черна от втората кутия

A_1= {1 бяла топка} = 1 бяла от първата кутия и 1 черна от втората кутия
или
1 черна от първата кутия и 1 бяла от втората кутия

A_2= {2 бели топки} = 1 бяла от първата кутия и 1 бяла от втората кутия

Изчисляваме вероятностите:

$$p_0 = \frac{5}{12}.\frac{9}{12} = \frac{45}{144}$$

$$p_1 = \frac{7}{12}.\frac{9}{12} + \frac{5}{12}.\frac{3}{12} = \frac{78}{144}$$

$$p_2 = \frac{7}{12}.\frac{3}{12} = \frac{21}{144}$$

Законът за разпределение е:

X	0	1	2
P	$\frac{45}{144}$	$\frac{78}{144}$	$\frac{21}{144}$

Функцията на разпределение е:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{45}{144} & 0 < x \le 1 \\ \frac{123}{144} & 1 < x \le 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

7. Законът за разпределение е:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

8. Случаите, в които сборът от точките се дели на 3, са 12:

(1;2), (1;5), (2;1), (2;4), (3;3), (3;6), (4;2), (4;5), (5;1), (5;4), (6;3), (6;6).

Случаите, в които сборът от точките дава остатък 1 при деление на 3, са 12:

(1;3), (1;6), (2;2), (2;5), (3;1), (3;4), (4;3), (4;6), (5;2), (5;5), (6;1), (6;4).

Случаите, в които сборът от точките дава остатък 2 при деление на 3, са 12:

(1;1), (1;4), (2;3), (2;6), (3;2), (3;5), (4;1), (4;4), (5;3), (5;6), (6;2), (6;5).

Тогава $p_0 = p_1 = p_2 = \frac{1}{3}$

Законът за разпределение е:

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Функцията на разпределение е:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{1}{3} & 0 < x \le 1 \\ \frac{2}{3} & 1 < x \le 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

9. Сборът от точките е по-малък от 7 в 15 случая, сборът от точките е 7 в 6 случая и сборът от точките е по-голям от 7 в 15 случая.

Вероятностите, с които случайната величина приема стойностите си са:

$p_0 = \frac{15}{36}$, $p_1 = \frac{6}{36}$, $p_2 = \frac{15}{36}$.

Функцията на разпределение е:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{15}{36} & 0 < x \le 1 \\ \frac{21}{36} & 1 < x \le 2 \\ 1 & 2 < x \end{cases}$$

10. Точките върху двата зара са еднакви в 6 случая.

Случаите, в които точките са различни нечетни числа, са 6:

$(1;3), (1;5), (3;1), (3;5), (5;1), (5;3)$.

Случаите, в които точките са различни четни числа, са 6:

$(2;4), (2;6), (4;2), (4;6); (6;2), (6;4)$.

Останалите случаи са 18.

Вероятностите, с които случайната величина приема стойностите си са:

$p_0 = p_1 = p_2 = \frac{1}{6}$ и $p_3 = \frac{3}{6}$.

Функцията на разпределение е:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{1}{6} & 0 < x \le 1 \\ \frac{2}{6} & 1 < x \le 2 \\ \frac{3}{6} & 2 < x \le 3 \\ 1 & 3 < x \end{cases}$$

2.2. Математическо очакване (средна стойност), определение и свойства.

2. а)

X	1	3	5	7	9	11	13
P	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

$$EX=1.\frac{1}{7}+3.\frac{1}{7}+5.\frac{1}{7}+7.\frac{1}{7}+9.\frac{1}{7}+11.\frac{1}{7}+13.\frac{1}{7}=\frac{1}{7}(1+3+5+7+9+11+13)=\frac{49}{7}=7.$$

б)

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

$$EX=0.\frac{8}{27}+1.\frac{12}{27}+2.\frac{6}{27}+3.\frac{1}{27}=1.$$

в)

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$EX=0.\frac{1}{16}+1.\frac{4}{16}+2.\frac{6}{16}+3.\frac{4}{16}+4.\frac{1}{16}=2.$$

г)

X	1	2	3
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$

$$EX=1.\frac{3}{8}+2.\frac{2}{8}+3.\frac{3}{8}=2.$$

2.3. Дисперсия и стандартно отклонение на случайна величина

3. а) Добавяме трети ред на таблицата за стойностите на X^2.

X	3	6	9	12	15	18
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
X^2	9	36	81	144	225	324

$$EX = \frac{3+6+9+12+15+18}{6} = \frac{63}{6} = 10,5$$

$$EX^2 = \frac{9+36+81+144+225+324}{6} = \frac{819}{6} = \frac{273}{2}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{273}{2} - \left(\frac{21}{2}\right)^2 = \frac{546-441}{4} = \frac{105}{4} = 26,25$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{105}}{2} \approx 5,12$$

б)

X	6	10	12
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
X^2	36	100	144

$$EX = \frac{6+10+12}{3} = \frac{28}{3}$$

$$EX^2 = \frac{36+100+144}{3} = \frac{280}{3}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{280}{3} - \left(\frac{28}{3}\right)^2 = \frac{840-784}{9} = \frac{56}{9} = 6\frac{2}{9} \approx 6,22$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{56}}{3} \simeq 2,49$$

в)

X	5	6	7	8	9
P	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$
X^2	25	36	49	64	81

$$EX = \frac{5.1+6.4+7.6+8.4+9.1}{16} = \frac{112}{16} = 7$$

$$EX^2 = \frac{25.1+36.4+49.6+64.4+81.1}{16} = \frac{800}{16} = 50$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 50 - 49 = 1$$

$$\sigma = 1$$

г) За удобство при пресмятането привеждаме вероятностите под общ знаменател.

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{21}{42}$	$\frac{3}{42}$	$\frac{4}{42}$	$\frac{2}{42}$	$\frac{12}{42}$
X^2	0	1	4	9	16

$$EX = 0.\frac{21}{42} + 1.\frac{3}{42} + 2.\frac{4}{42} + 3.\frac{2}{42} + 4.\frac{12}{42} = \frac{65}{42}$$

$$EX^2 = 0.\frac{21}{42} + 1.\frac{3}{42} + 4.\frac{4}{42} + 9.\frac{2}{42} + 16.\frac{12}{42} = \frac{229}{42}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{229}{42} - \left(\frac{65}{42}\right)^2 = \frac{5393}{1764} = 3\frac{101}{1764} \approx 3,06$$

$$\sigma = \sqrt{DX} \approx 1,75$$

д)

X	1	3	5	7	9
P	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{6}{11}$
X^2	1	9	25	49	81

$$EX = \frac{1+3+5+14+54}{11} = \frac{77}{11} = 7$$

$$EX^2 = \frac{1.1+1.9+1.25+2.49+6.81}{11} = \frac{619}{11}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{619}{11} - 49 = \frac{80}{11}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{80}{11}} = \frac{4\sqrt{55}}{11}$$

е) За удобство при пресмятането привеждаме вероятностите под общ знаменател.

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{7}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{1}{21}$
X^2	0	1	4	9	16	25

$$EX = \frac{0.7+1.2+2.2+3.2+4.7+5.1}{21} = \frac{45}{21} = \frac{15}{7}$$

$$EX^2 = \frac{0.7+1.2+4.2+9.2+16.7+25.1}{21} = \frac{165}{21} = \frac{55}{7}$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{55}{7} - \left(\frac{15}{7}\right)^2 = \frac{160}{49}$$

$$\sigma = \frac{4\sqrt{10}}{7}$$