1.1. Вероятност и независимост. Пълна група събития и формула на пълната вероятност

1) Преговор

1. Имаме $\Omega = \{EEE, EET, ETE, ETT, TEE, TET, TTE, TTT\}$ и $\nu(\Omega) = \widetilde{V}_2^3 = 2^3 = 8$.

$A = \{EEE, EET, ETE, TEE\}$

$B = \{TEE, TET, TTE, TTT\}$

$C = \{ETT, TET, TTE\}$

а) $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{3}{8}$.

б) $P(C \mid B) = \frac{P(CB)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$. $\quad P(B \mid C) = \frac{P(BC)}{P(C)} = \frac{\frac{2}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$.

$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$.

в) $P(AB) = \frac{1}{8}$, $P(A)P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow P(AB) \neq P(A)P(B)$, събитията A и B не са независими.

$P(BC) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$, $P(B)P(C) = \frac{1}{2}.\frac{3}{8} = \frac{3}{16} \Rightarrow P(BC) \neq P(B)P(C)$, събитията B и C не са независими.

2. Четните числа при хвърляне на зар са $2,4,6$, а простите числа са $2,3,5$.

$\Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ и $P(AB) = \frac{1}{6}$.

$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$, $P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

3. а) Нека A={пада се число, което се дели на 3} и B={пада се число, по-малко от 5}

Числата, които се делят на 3 при хвърляне на зар са 3 и 6, а числата по-малки от 5 са $1,2,3,4$.

$\Rightarrow P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{4}$.

б) P({ пада се число по-голямо от 1} | { пада се четно число})= $\frac{\frac{3}{6}}{\frac{3}{6}} = 1$.

в) P({ пада се 1} | { пада се нечетно число})= $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$.

4. Всички изходи са $36 = \tilde{V}_6^2 = 6^2$.

$A = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$ – 6 благоприятни изхода.

Събитието B има 18 благоприятни изхода – всяко от числата $1,3,5$ при второ хвърляне се съединява с всяко от числата от 1 до 6 при първо хвърляне.

$AB = A \cap B = \{(6,1), (6,3), (6,5)\}$ – 3 благоприятни изхода.

$\Rightarrow P(AB) = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$

$P(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ и $P(B) = \dfrac{18}{36} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $P(AB) = P(A)P(B)$ $\Rightarrow$ A и B са независими.

5. Попълваме таблица за всички възможни случаи при хвърляне на два зара.

1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

а) P({еднакви числа} | {сбор по-малък от 6})= $\dfrac{\frac{2}{36}}{\frac{10}{36}} = \dfrac{1}{5}$.

б) P({сбор по-малък от 6} | {еднакви числа})= $\dfrac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \dfrac{1}{3}$

в) P({пада се 5 на единия зар} | {число по-голямо от 2 на другия зар})= $\dfrac{\frac{7}{36}}{\frac{32}{36}} = \dfrac{7}{32}$.

г) P({на единия зар число по-малко от 4} | {на другия се пада 3})= $\dfrac{\frac{5}{36}}{\frac{11}{36}} = \dfrac{5}{11}$.

д) P({на единия зар се пада 1} | {сбор по-голям от 6})= $\dfrac{\frac{2}{36}}{\frac{21}{36}} = \dfrac{2}{21}$.

е) P({сбор по-голям от 5} | {на единия зар се пада 3})= $\dfrac{\frac{7}{36}}{\frac{11}{36}} = \dfrac{7}{11}$.

6. Всички изходи са 36 (както при едновременно хвърляне на два зара).

а) $P($ {1-ви път четно число} | {2-ри път просто число} $)= \dfrac{\frac{9}{36}}{\frac{18}{36}} = \dfrac{1}{2}$.

б) $P($ {1-ви път число по-голямо от 1} | {2-ри път четно число} $)= \dfrac{\frac{15}{26}}{\frac{18}{36}} = \dfrac{5}{6}$.

в) $P($ {2-ри път нечетно число} | {сбор 8} $)= \dfrac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \dfrac{2}{5}$.

7. Извадени са 2 бели топки $\Rightarrow$ остават 3 бели и 6 черни топки.

Вероятността да извадим 1 черна е $\dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$.

10. Да означим кутиите с K_1, K_2 и K_3.

3 бели 4 черни	4 бели 2 черни	5 бели 3 черни
Кутия 1	Кутия 2	Кутия 3

A_i ={избрана е кутия K_i}, $i = 1,2,3$.

$\Rightarrow P(A_i) = \dfrac{1}{3}$, $i = 1,2,3$.

B={извадена е една бяла топка}.

$\Rightarrow P(B \mid A_1) = \dfrac{3}{7}$, $P(B \mid A_2) = \dfrac{4}{6}$, $P(B \mid A_3) = \dfrac{5}{8}$.

Тогава $P(BA_1) = P(A_1)P(B \mid A_1) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{7}$ – вероятността да изберем първата кутия и да извадим една бяла топка от нея.

Тогава $P(BA_2) = P(A_2)P(B \mid A_2) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{4}{6}$ вероятността да изберем втората кутия и да извадим една бяла топка от нея.

Тогава $P(BA_3) = P(A_3)P(B \mid A_3) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{5}{8}$ – вероятността да изберем третата кутия и да извадим една бяла топка от нея.

Избрана е първата или втората, или третата кутия. Следователно търсената вероятност е $\dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{7} + \dfrac{1}{3}.\dfrac{4}{6} + \dfrac{1}{3}.\dfrac{5}{8} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3}{7} + \dfrac{4}{6} + \dfrac{5}{8}\right)$.

11. Да означим кутиите с K_1, K_2 и K_3.

Кутия 1	Кутия 2	Кутия 3
2 бели	3 бели	5 бели
4 черни	3 черни	2 черни

A_i={избрана е кутия K_i}, $i=1,2,3$.

$\Rightarrow P(A_i)=\dfrac{1}{3}$, $i=1,2,3$.

B={извадена е една бяла топка}.

$\Rightarrow P(B \mid A_1)=\dfrac{2}{6}$, $P(B \mid A_2)=\dfrac{3}{6}$, $P(B \mid A_3)=\dfrac{5}{7}$.

Тогава $P(BA_1)=P(A_1)P(B \mid A_1)=\dfrac{1}{3}.\dfrac{2}{6}$ – вероятността да изберем първата кутия и да извадим една бяла топка от нея.

Тогава $P(BA_2)=P(A_2)P(B \mid A_2)=\dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{6}$ – вероятността да изберем втората кутия и да извадим една бяла топка от нея.

Тогава $P(BA_3)=P(A_3)P(B \mid A_3)=\dfrac{1}{3}.\dfrac{5}{7}$ – вероятността да изберем третата кутия и да извадим една бяла топка от нея.

Избрана е първата или втората, или третата кутия. Следователно търсената вероятност е $\dfrac{1}{3}.\dfrac{2}{6}+\dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{6}+\dfrac{1}{3}.\dfrac{5}{7}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{6}+\dfrac{3}{6}+\dfrac{5}{7}\right)$.

12. Да означим кутиите с K_1, K_2 и K_3.

Кутия 1	Кутия 2	Кутия 3
3 бели	4 бели	5 бели
4 черни	5 черни	3 черни

A_i={избрана е кутия K_i}, $i=1,2,3$.

$\Rightarrow P(A_i)=\dfrac{1}{3}$, $i=1,2,3$.

а) B={извадени са две бели топки}.

$\Rightarrow P(B \mid A_1)=\dfrac{C_3^2}{C_7^2}$, $P(B \mid A_2)=\dfrac{C_4^2}{C_9^2}$, $P(B \mid A_3)=\dfrac{C_5^2}{C_8^2}$.

Тогава $P(BA_1)=P(A_1)P(B \mid A_1)=\dfrac{1}{3}.\dfrac{C_3^2}{C_7^2}$ – вероятността да изберем първата кутия и да извадим две бели топки от нея.

Тогава $P(BA_2)=P(A_2)P(B \mid A_2)=\dfrac{1}{3}.\dfrac{C_4^2}{C_9^2}$ – вероятността да изберем втората кутия и да извадим две бели топки от нея.

Тогава $P(BA_3)=P(A_3)P(B \mid A_3)=\dfrac{1}{3}.\dfrac{C_5^2}{C_8^2}$ – вероятността да изберем третата кутия и да извадим две бели топки от нея.

Избрана е първата или втората, или третата кутия. Следователно търсената вероятност е $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{C_3^2}{C_7^2}+\dfrac{C_4^2}{C_9^2}+\dfrac{C_5^2}{C_8^2}\right)$.

б) B={извадени са две едноцветни топки}.

$\Rightarrow P(B \mid A_1) = \dfrac{C_3^2 + C_4^2}{C_7^2}$, $P(B \mid A_2) = \dfrac{C_4^2 + C_5^2}{C_9^2}$, $P(B \mid A_3) = \dfrac{C_5^2 + C_3^2}{C_8^2}$.

Тогава $P(BA_1) = P(A_1)P(B \mid A_1) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{C_3^2 + C_4^2}{C_7^2}$ – вероятността да изберем първата кутия и да извадим две едноцветни топки от нея.

Тогава $P(BA_2) = P(A_2)P(B \mid A_2) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{C_4^2 + C_5^2}{C_9^2}$ – вероятността да изберем втората кутия и да извадим две едноцветни топки от нея.

Тогава $P(BA_3) = P(A_3)P(B \mid A_3) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{C_5^2 + C_3^2}{C_8^2}$ – вероятността да изберем третата кутия и да извадим две едноцветни топки от нея.

Избрана е първата или втората, или третата кутия. Следователно търсената вероятност е $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{C_3^2 + C_4^2}{C_7^2} + \dfrac{C_4^2 + C_5^2}{C_9^2} + \dfrac{C_5^2 + C_3^2}{C_8^2}\right)$.

в) B={извадени са две разноцветни топки}.

$\Rightarrow P(B \mid A_1) = \dfrac{C_3^1 C_4^1}{C_7^2}$, $P(B \mid A_2) = \dfrac{C_4^1 C_5^1}{C_9^2}$, $P(B \mid A_3) = \dfrac{C_5^1 C_3^1}{C_8^2}$.

Тогава $P(BA_1) = P(A_1)P(B \mid A_1) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{C_3^1 C_4^1}{C_7^2}$ – вероятността да изберем първата кутия и да извадим две разноцветни топки от нея.

Тогава $P(BA_2) = P(A_2)P(B \mid A_2) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{C_4^1 C_5^1}{C_9^2}$ – вероятността да изберем втората кутия и да извадим две разноцветни топки от нея.

Тогава $P(BA_3) = P(A_3)P(B \mid A_3) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{C_5^1 C_3^1}{C_8^2}$ – вероятността да изберем третата кутия и да извадим две разноцветни топки от нея.

Избрана е първата или втората, или третата кутия. Следователно търсената вероятност е $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{C_3^1 C_4^1}{C_7^2} + \dfrac{C_4^1 C_5^1}{C_9^2} + \dfrac{C_5^1 C_3^1}{C_8^2}\right)$.

13. В три кутии има бели и черни топки. В първата има 5 бели и 7 черни, във втората – 4 бели и 6 черни, в третата – 8 бели и 3 черни. От случайно избрана кутия са извадени 2 топки без връщане. Каква е вероятността:

а) двете топки да са бели;
б) двете да са едноцветни;
в) двете да са разноцветни?

14. В три кутии има бели и черни топки. В първата има 4 бели и 4 черни, във втората – 3 бели и 6 черни, в третата – 5 бели и 3 черни. От случайно избрана кутия са извадени 2 топки без връщане. Каква е вероятността:

а) двете топки да са бели;

б) двете да са едноцветни;

в) двете да са разноцветни?

15. а) Първата извадена топка може да бъде бяла и не бяла, т.е. черна $\Rightarrow$ $A_2 = \overline{A_1}$ $\Rightarrow$ двете събития образуват пълна група събития.

б) При изваждането на две топки случаите бб, чч, бч изчерпват всички възможности и събитията са две по две несъвместими $\Rightarrow$ образуват пълна група събития.

16. а) Извадените две топки или са едноцветни, или са разноцветни $\Rightarrow A$ и B образуват пълна група събития.

б) Имаме $P(A\,|\,C) = \dfrac{P(AC)}{P(C)}$.

$A \cap C$ съдържа всички изходи, при които са извадени две бели топки $\Rightarrow$ $P(AC) = \dfrac{C_5^2}{C_9^2}$.

C съдържа всички изходи, при които са извадени две бели или бяла и черна топка $\Rightarrow$ $P(C) = \dfrac{C_5^2 + C_5^1 C_4^1}{C_9^2}$.

$$P(A\,|\,C) = \frac{P(AC)}{P(C)} = \frac{C_5^2}{C_5^2 + C_5^1 C_4^1}.$$

17. а) Изходите, при които сборът от точките е точно 7 принадлежат и на двете събития $\Rightarrow$ $A \cap B \neq \varnothing$ $\Rightarrow A$ и B не образуват пълна група.

б) Образуват пълна група събития.

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

A се състои от изходите, отбелязани в първите три колони на таблицата.
B се състои от изходите отбелязани във вторите три колони и първите три реда.
C се състои от изходите отбелязани във вторите три колони и във вторите три реда.

18. Събитията $A_i =$ {извадени са i бели топки }, $i = 0, 1, 2, 3$ образуват пълна група събития.

$$P(A_0) = \frac{C_6^3}{C_{11}^3},\quad P(A_1) = \frac{C_5^1 C_6^2}{C_{11}^3},\quad P(A_2) = \frac{C_5^2 C_6^1}{C_{11}^3},\quad P(A_3) = \frac{C_5^3}{C_{11}^3}.$$

19. Събитията $A_i =$ {извадени са i бели топки }, $i = 0,1,2$ образуват пълна група събития.

$$P(A_0) = \frac{C_2^2}{C_6^2}, \quad P(A_1) = \frac{C_4^1 C_2^1}{C_6^2}, \quad P(A_2) = \frac{C_4^2}{C_6^2}.$$

20. а) $P(A) = \frac{11}{36}$, $P(B) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$, $P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

б) $P(A \mid B) = \dfrac{\frac{4}{36}}{\frac{20}{36}} = \frac{1}{5}$.

в) $P(B \mid C) = \dfrac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{3}$.

г) $P(C \mid A) = \dfrac{\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{1}{11}$.

2) Пълна вероятност

21. Избираме пълна група от събития:

H_1={първата извадена топка е бяла} и H_2={първата извадена топка е черна} $\Rightarrow$ $P(H_1)=\frac{12}{20}$, $P(H_2)=\frac{8}{20}$.

Нека $A=${втората топка е черна} . Тогава:

вероятността на събитието A при хипотезата H_1 е $P(A\,|\,H_1)=\frac{8}{19}$,

вероятността на събитието A при хипотезата H_2 е $P(A\,|\,H_2)=\frac{7}{19}$.

Прилагаме формулата за пълната вероятност и получаваме:

$\Rightarrow\ P(A)=P(H_1).P(A|H_1)+P(H_2).P(A|H_2)=\frac{12}{20}.\frac{8}{19}+\frac{8}{20}.\frac{7}{19}=\frac{2}{5}$.

22. Избираме пълна група от събития:

H_1= {първата извадена топка е бяла}

H_2= {първата извадена топка е черна}.

$\Rightarrow\ P(H_1)=\frac{8}{11},\ P(H_2)=\frac{3}{11}$.

Нека A= {втората и третата топки са едноцветни}. Тогава

вероятността на събитието A при хипотезата H_1 е $P(A\,|\,H_1)=\frac{C_7^2+C_3^2}{C_{10}^2}=\frac{8}{15}$,

вероятността на събитието A при хипотезата H_2 е $P(A\,|\,H_2)=\frac{C_8^2+C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{29}{45}$.

Прилагаме формулата за пълната вероятност и получаваме:

$\Rightarrow P(A)=\frac{8}{11}.\frac{8}{15}+\frac{3}{11}.\frac{29}{45}=\frac{31}{55}$.

23. Избираме пълна група от събития:

H_1= {първата извадена топка е бяла}

H_2= {първата извадена топка е зелена}

H_3= {първата извадена топка е червена}

$\Rightarrow\ P(H_1)=\frac{8}{16},\ P(H_2)=\frac{3}{16},\ P(H_3)=\frac{5}{16}$.

Нека A= {втората извадена топка е зелена}.

Вероятностите на събитието A при съответната хипотеза са:

$P(A\,|\,H_1)=\frac{3}{15},\ P(A\,|\,H_2)=\frac{2}{15},\ P(A\,|\,H_3)=\frac{3}{15}$.

$\Rightarrow\ P(A)=\frac{8}{16}.\frac{3}{15}+\frac{3}{16}.\frac{2}{15}+\frac{5}{16}.\frac{3}{15}=\frac{3}{16}$.

24. В три кутии има бели и черни топки, като в първата има 2 бели и 3 черни, във втората – 1 бяла и 4 черни, в третата – 3 бели и 3 черни. Случайно е избрана кутия и от нея е извадена една топка. Каква е вероятността топката да е бяла?

25. В четири кутии има бели и черни топки, като в първата има 5 бели и 5 черни, във втората – 1 бяла и 2 черни, в третата – 2 бели и 5 черни и в четвъртата – 3 бели и 7 черни. Случайно се избира кутия и от нея една топка. Каква е вероятността тази топка да е черна?

26. Избираме пълна група събития: $H_i =$ {детайлът е произведен в завод i }, $i = 1, 2, 3$.

$\Rightarrow$ $P(H_1) = \dfrac{20}{100} = 0,2$, $P(H_2) = \dfrac{30}{100} = 0,3$, $P(H_3) = \dfrac{50}{100} = 0,5$.

Нека A= {детайлът е дефектен}.

По условие $P(A \mid H_1) = 0,05$, $P(A \mid H_2) = 0,01$, $P(A \mid H_3) = 0,06$.

$\Rightarrow$ $P(A) = 0,2.0,05 + 0,3.0,01 + 0,5.0,06 = 0,043$.

27. Чрез изброяване на възможностите за първите две топки образуваме пълна група събития:

H_1= {първите две топки са бели }

H_2= {първите две топки са зелени }

H_3= {първите две топки са червени}

H_4= {от първите две топки едната е бяла, другата е зелена }

H_5= {от първите две топки едната е бяла, другата е червена }

H_6= {от първите две топки едната е зелена, другата е червена }

$P(H_1) = \dfrac{C_4^2}{C_{14}^2} = \dfrac{6}{7.13}$,

$P(H_2) = \dfrac{28}{7.13}$, $P(H_3) = \dfrac{1}{7.13}$,

$P(H_4) = \dfrac{C_4^1 C_8^1}{C_{14}^2} = \dfrac{32}{7.13}$,

$P(H_5) = \dfrac{8}{7.13}$, $P(H_6) = \dfrac{16}{7.13}$.

Нека A= {третата извадена топка е бяла}

$P(A \mid H_1) = \dfrac{2}{12}$, защото при хипотезата H_1 са останали 12 топки, от които 2 бели,

$P(A \mid H_2) = \dfrac{4}{12}$

$P(A \mid H_3) = \dfrac{4}{12}$

$P(A \mid H_4) = \dfrac{3}{12}$

$P(A \mid H_5) = \dfrac{3}{12}$

$P(A \mid H_6) = \dfrac{4}{12}$

$\Rightarrow$ $P(A) = \dfrac{1}{7.13.12}(12 + 112 + 4 + 96 + 24 + 64) = \dfrac{2}{7}$.

28. Избираме пълна група от събития:

H_1={първото дете е взело шоколадов бонбон}

$H_2 = \overline{H}_1$={първото дете НЕ е взело шоколадов бонбон}

$\Rightarrow\ P(H_1) = \dfrac{m}{N}$ и $P(H_2) = 1 - \dfrac{m}{N} = \dfrac{N-m}{N}$.

Нека A={второто дете е взело шоколадов бонбон}

$\Rightarrow\ P(A \mid H_1) = \dfrac{m-1}{N-1}$ и $P(A \mid H_2) = \dfrac{m}{N-1}$.

По формулата за пълната вероятност получаваме:

$$P(A) = \frac{m}{N}.\frac{m-1}{N-1} + \frac{N-m}{N}.\frac{m}{N-1} = \frac{m(N-1)}{N(N-1)} = \frac{m}{N}.$$

Получихме, че $P(H_1) = P(A)$, т.е двете деца имат равни вероятности да вземат шоколадов бонбон.

1.2. Формула на Бейс

1. За хипотези избираме пълната група събития:

H_1={избрана е кутия 1}

H_2={избрана е кутия 2}.

Нека A={извадени са две бели топки}.

Търсим $P(H_1 \mid A)$.

Последователно намираме.

$P(H_1) = P(H_2) = \dfrac{1}{2}$.

$P(A \mid H_1) = \dfrac{C_7^2}{C_9^2} = \dfrac{7}{12}$

$P(A \mid H_2) = \dfrac{C_7^2}{C_{12}^2} = \dfrac{7}{22}$

Прилагаме формулата на Бейс:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{\frac{1}{2}.\frac{7}{12}}{\frac{7}{2}\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{22}\right)} = \frac{11}{17}.$$

2. Избираме пълна група от събития:

H_1={първата извадена топка е бяла}

H_2={първата извадена топка е зелена}

H_3={първата извадена топка е червена}.

Нека A={втората и третата топки са червени}.

$$P(H_1)=\frac{3}{12},\ P(H_2)=\frac{5}{12},\ P(H_3)=\frac{4}{12}.$$

$$P(A\,|\,H_1)=\frac{C_4^2}{C_{11}^2}=\frac{6}{55},\ \ P(A\,|\,H_2)=P(A\,|\,H_1)=\frac{6}{55},\ \ P(A\,|\,H_3)=\frac{C_3^2}{C_{11}^2}=\frac{3}{55}.$$

Прилагаме формулата на Бейс.

$$P(H_1\,|\,A)=\frac{\frac{3}{12}.\frac{6}{55}}{\frac{3}{12}.\frac{6}{55}+\frac{5}{12}.\frac{6}{55}+\frac{4}{12}.\frac{3}{55}}=\frac{3}{10}.$$

3. Нека H_i={избрана е кутия i}, $i=1,2,3$

и A={извадените топки са разноцветни}.

Кутия 1	Кутия 2	Кутия 3
11 бели	12 бели	11 бели
8 черни	9 черни	9 черни

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}.$$

Търсим $P(H_2\,|\,A)$.

$$P(A\,|\,H_1)=\frac{C_{11}^1C_8^1}{C_{19}^2}=\frac{88}{171},\ \ \ P(A\,|\,H_2)=\frac{C_{12}^1C_9^1}{C_{21}^2}=\frac{18}{35},\ \ \ P(A\,|\,H_3)=\frac{C_{11}^1C_9^1}{C_{20}^2}=\frac{99}{190}.$$

$$\Rightarrow\ P(H_2\,|\,A)=\frac{\frac{1}{3}.\frac{18}{35}}{\frac{1}{3}\left(\frac{88}{171}+\frac{18}{35}+\frac{99}{190}\right)}=\frac{6156}{18553}\approx 0,33.$$

4. Нека H_i={избрана е кутия i}, $i=1,2,3$.

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}.$$

Кутия 1	Кутия 2	Кутия 3
17 бели	12 бели	11 бели
6 черни	7 черни	11 черни

Нека A={извадените три топки са бели}.

$$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}.$$

Търсим $P(H_3\,|\,A)$.

$$P(A\,|\,H_1)=\frac{C_{17}^3}{C_{23}^3}=\frac{680}{1771},\ P(A\,|\,H_2)=\frac{C_{12}^3}{C_{19}^3}=\frac{220}{969},\ P(A\,|\,H_3)=\frac{C_{11}^3}{C_{22}^3}=\frac{3}{28}.$$

$$\Rightarrow\ \ P(H_3\,|\,A)=\frac{\frac{1}{3}.\frac{3}{28}}{\frac{1}{3}\left(\frac{380}{1771}+\frac{220}{969}+\frac{3}{28}\right)}=\frac{3}{28}.\frac{6864396}{4929631}=\frac{735471}{4929631}\approx 0,15.$$

5. Да разгледаме пълната група събития:

Кутия 1	Кутия 2
5 бели 3 черни	8 бели 5 черни

H_1={прехвърлената топка е черна}

H_2={прехвърлената топка е бяла}.

$P(H_1)=\frac{3}{8}$, $P(H_2)=\frac{5}{8}$.

Нека A={извадената топка от втората кутия е черна}.

$P(A\,|\,H_1)=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$

Кутиите при хипотезата H_1:

Кутия 1	Кутия 2
5 бели 2 черни	8 бели 6 черни

$P(A\,|\,H_2)=\frac{5}{14}$

Кутиите при хипотезата H_2:

Кутия 1	Кутия 2
4 бели 3 черни	9 бели 5 черни

$$\Rightarrow\ P(H_1\,|\,A)=\frac{\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{7}}{\frac{3}{8}\cdot\frac{6}{14}+\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{14}}=\frac{18}{43}$$

6. Нека:

H_i={избран е щанд i}, $i=1,2,3$

$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$

A={купен е 1 kg портокали}

На всеки щанд портокалите и мандарините са по равни количества $\Rightarrow$

$P(A\,|\,H_1)=\frac{1}{2}$, $P(A\,|\,H_2)=\frac{1}{2}$, $P(A\,|\,H_3)=\frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow\ P(H_2\,|\,A)=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)}=\frac{1}{3}.$$

7. Нека:

H_i={частта е произведена в завод i}, $i=1,2,3$.

A={избраната част е дефектна}.

$$P(H_1)=\frac{20}{100}=\frac{2}{10},\quad P(H_2)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10};\quad P(H_3)=\frac{50}{100}=\frac{5}{10}.$$

$$P(A\,|\,H_1)=\frac{5}{100},\ P(A\,|\,H_2)=\frac{4}{100},\ P(A\,|\,H_3)=\frac{2}{100}.$$

Следователно:

$$P(A)=\frac{2}{10}.\frac{5}{100}+\frac{3}{10}.\frac{4}{100}+\frac{5}{10}.\frac{2}{100}=\frac{32}{1000}.$$

$$P(H_1\,|\,A)=\frac{2}{10}.\frac{5}{100}.\frac{1000}{32}=\frac{5}{16}$$

$$P(H_2\,|\,A)=\frac{3}{10}.\frac{4}{100}.\frac{1000}{32}=\frac{3}{8}$$

$$P(H_3\,|\,A)=\frac{5}{10}.\frac{2}{100}.\frac{1000}{32}=\frac{5}{16}.$$

8. Нека:

H_1={избран е левия джоб }

H_2={избран е десния джоб }

A={извадени са два различни бонбона}.

ляв джоб	десен джоб
3 розови	2 розови
1 ментов	2 ментови

$$P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}.$$

$$P(A\,|\,H_1)=\frac{3.1}{C_4^2}=\frac{1}{2},\ P(A\,|\,H_2)=\frac{2.2}{C_4^2}=\frac{2}{3}.$$

$$\Rightarrow\ P(H_2\,|\,A)=\frac{4}{7}.$$

9. Нека:

H_1={ученикът се е записал за театър}

H_2={ученикът се е записал за концерт}.

H_1 и H_2 образуват пълна група събития.

$P(H_1)=0,3$, $P(H_2)=0,7$

A={ученикът е посетил мероприятието, за което се е записал}.

$P(A\,|\,H_1)=0,9$, $P(A\,|\,H_2)=0,8$.

а) $P(H_1\,|\,A)=\dfrac{0,3.0,9}{0,3.0,9+0,7.0,8}\approx 0,33.$

б) $P(H_2\,|\,A)=\dfrac{0,7.0,8}{0,3.0,9+0,7.0,8}\approx 0,67$

10. Нека:

Нека H_i ={избраното дете е от група i }, $i = 1,2,3$.

$P(H_1) = \frac{20}{100}$, $P(H_2) = \frac{35}{100}$, $P(H_3) = \frac{45}{100}$.

A={избраното дете отсъства днес}.

$P(A \mid H_1) = 0{,}1$

$P(A \mid H_2) = 0{,}08$

$P(A \mid H_3) = 0{,}05$

$\Rightarrow P(A) = \frac{1}{100}\left(20.0{,}1 + 35.0{,}08 + 45.0{,}05\right) = 0{,}0705$.

11. Нека:

H_1 ={прехвърлена топка е бяла}

H_2 ={прехвърлената топка е черна}.

$P(H_1) = \frac{4}{7}$, $P(H_2) = \frac{3}{7}$.

A={от втората кутия са извадени две едноцветни топки}.

$P(A \mid H_1) = \frac{C_4^2 + C_5^2}{C_9^2} = \frac{8}{18}$

$P(A \mid H_2) = \frac{C_3^2 + C_6^2}{C_9^2} = \frac{9}{18}$

$\Rightarrow P(A) = \frac{4}{7}.\frac{8}{18} + \frac{3}{7}.\frac{9}{18} = \frac{59}{7.18} = \frac{59}{126}$ е вероятността двете извадени топки от втората кутия да са едноцветни.

$\Rightarrow P(H_1 \mid A) = \frac{\frac{4}{7}.\frac{8}{18}}{P(A)} = \frac{\frac{4}{7}.\frac{8}{18}}{\frac{59}{7.18}} = \frac{32}{59}$ е вероятността прехвърлената топка да е бяла при предположение, че от втората са извадени две едноцветни топки.

12.

1 бяла, 12 черни	2 бели, 11 черни	3 бели, 10 черни	…	13 бели, 0 черни
Y_1	Y_2	Y_3	…	Y_{13}

Събитията H_k ={избрана е кутия Y_k }, $k=1,2,...,13$ образуват пълна група.

Вероятността да бъде избрана една кутия е пропорционална на броя на съдържащите се в нея бели топки: $P(H_k)=\alpha.k$, $k=1,2,...,13$, т.е.

$$P(H_1)=\alpha.1,\quad P(H_2)=\alpha.2,\quad P(H_3)=\alpha.3\quad \ldots\quad P(H_{12})=\alpha.12,\quad P(H_{13})=\alpha.13.$$

Тъй като събитията $H_1,H_2,...,H_{13}$ образуват пълна група, то сумата от вероятностите име е 1, поради което може да запишем уравнението:

$$\alpha+2\alpha+3\alpha+...+13\alpha=1,\quad \alpha=\frac{1}{7.13}=\frac{1}{91}\quad \text{или}\quad P(H_k)=\frac{k}{7.13}$$

Нека събитието A е {извадени са две топки с различен цвят}.

Търси се за кое k вероятността $P(H_k\mid A)$ е най-голяма.

За намиране на апостериорната вероятност $P(H_k\mid A)$ ще използваме формулата на Бейс.

За удобство подреждаме в колони резултатите от пресмятането:

$P(H_k)$	$P(A\mid H_k)$	$P(H_k).P(A\mid H_k)$
$P(H_1)=\frac{1}{7.13}$	$P(A\mid H_1)=\frac{C_1^1C_{12}^1}{C_{13}^2}=\frac{1.12}{6.13}$	$\frac{1}{7.13}.\frac{1.12}{6.13}=\frac{1^2.12}{6.7.13^2}$
$P(H_2)=\frac{2}{7.13}$	$P(A\mid H_2)=\frac{C_2^1C_{11}^1}{C_{13}^2}=\frac{2.11}{6.13}$	$\frac{2}{7.13}.\frac{2.11}{6.13}=\frac{2^2.11}{6.7.13^2}$
…		
$P(H_k)=\frac{k}{7.13}$	$P(A\mid H_k)=\frac{C_k^1C_{13-k}^1}{C_{13}^2}=\frac{k.(13-k)}{6.13}$	$\frac{k}{7.13}.\frac{k.(13-k)}{6.13}=\frac{k^2(13-k)}{6.7.13^2}$
…		
$P(H_{12})=\frac{12}{7.13}$	$P(A\mid H_{12})=\frac{C_{12}^1C_1^1}{C_{13}^2}=\frac{12.1}{6.13}$	$\frac{12}{7.13}.\frac{12.1}{6.13}=\frac{12^2.1}{6.7.13^2}$
$P(H_{13})=\frac{13}{7.13}$	$P(A\mid H_{13})=\frac{C_{13}^1 0}{C_{13}^2}=\frac{13.0}{6.13}$	0

За да намерим $P(A)$ прилагаме формулата за пълната вероятност, като сумираме изразите от последната колона:

$$P(A)=\frac{1^2.12}{6.7.13^2}+\frac{2^2.11}{6.7.13^2}+\frac{3^2.10}{6.7.13^2}+...+\frac{12^2.1}{6.7.13^2}+0=$$

$$=\frac{1}{6.7.13^2}\left(1^2.12+2^2.11+3^2.10+...+12^2.1\right)=\frac{2366}{6.7.13^2}=\frac{2.7.13^2}{6.7.13^2}=\frac{1}{3}.$$

За апостериорните вероятности получаваме:

$$P(H_1 \mid A) = \frac{1^2.12}{6.7.13^2}.3 = \frac{1^2.12}{14.13^2},$$

$$P(H_2 \mid A) = \frac{2^2.11}{6.7.13^2}.3 = \frac{2^2.11}{14.13^2},$$

$$P(H_3 \mid A) = \frac{3^2.10}{6.7.13^2}.3 = \frac{3^2.10}{14.13^2},\ldots$$

или $P(H_k \mid A) = \dfrac{k^2.(13-k)}{14.13^2}$, $k = 1,2,\ldots,13$.

Трябва да намерим за кое k се получава най-голямата стойност на $P(H_k \mid A)$, $k = 1,2,\ldots,13$.

Разглеждаме функцията $f(x) = x^2(13-x)$, $x \in [1,13]$.

$f(x) = 13x^2 - x^3$

$f'(x) = 26x - 3x^2 = x(26-3x) = 0$.

$\Rightarrow$ При $x = \dfrac{26}{3}$ $f(x)$ има локален максимум и в интервала $[1,13]$ производната има единствен корен $\Rightarrow$ най-голямата стойност на $f(x)$ в интервала $[1,13]$ се достига при $x = \dfrac{26}{3} = 8\dfrac{2}{3}$.

Тогава двете топки с най-голяма вероятност са принадлежали на кутия Y_9.

<u>Коментар.</u>

Сумата $1^2.12 + 2^2.11 + 3^2.10 + \ldots + 12^2.1$ може да пресметнем и така:

$1^2.12 + 2^2.11 + 3^2.10 + \ldots + 12^2.1 = 1^2.(13-1) + 2^2.(13-2) + 3^2.(13-3) + \ldots + 12^2.(13-12) =$

$= 13(1^2 + 2^2 + \ldots + 12^2) - 1.1^2 - 2.2^2 - \ldots - 12.12^2 =$

$= 13(1^2 + 2^2 + \ldots + 12^2) - (1^3 + 2^3 + \ldots + 12^3)$.

Сега използваме формулите за сбор от квадратите и сбор от кубовете на първите n естествени числа:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$\Rightarrow 1^2.12 + 2^2.11 + 3^2.10 + \ldots + 12^2.1 = 13(1^2 + 2^2 + \ldots + 12^2) - (1^3 + 2^3 + \ldots + 12^3) =$

$$= 13.\frac{12.13.25}{6} - \frac{12^2.13^2}{4} =$$

$$= \frac{12.13^2}{2}\left(\frac{25}{3} - \frac{12}{2}\right) =$$

$$= \frac{12.13^2}{2}.\frac{14}{6} = 14.13^2 .\blacktriangle$$