4.1. Съединения с повторения

1) Вариации с повторение

5. В условието на задачата няма изискването числата да бъдат с различни цифри.

Нечетните цифри са $1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9$ – общо 5 на брой.

Трябва да преброим редиците с дължина 6 (числата са шестцифрени), записани с 5-те нечетни цифри. Това са вариации с повторение от 5 елемента 6-ти клас.

Броят име е $\tilde{V}_5^6 = 5^6$.

6. В условието на задачата няма изискването числата да бъдат с различни цифри.

I. Решение.

Това са всички 9-цифрени числа, на които е добавена още една цифра – цифрата 5 $\Rightarrow$ броят им е, колкото е броят на 9-цифрените числа.

Разсъждавайки, както в задача 2, получаваме, че 9-цифрените числа са $\tilde{V}_{10}^9 - \tilde{V}_{10}^8 = 10^9 - 10^8 = 10^8(10-1) = 9.10^8$

II. Решение.

Трябва да преброим редиците с дължина 10, на които:

– първата цифра се избира от девет цифри $(1,2,...,9)$;

– цифрите от втората до деветата се избират от 10 цифри $(0,1,2,...,9)$;

– десетата цифра е 5 (една възможност).

Броят им е $9.\underbrace{10.....10}_{8\ \text{пъти}}.1 = 9.10^8$.

7. В условието на задачата няма изискването числата да бъдат с различни цифри.

Образуваме редици с дължина k, записани с n цифри без нулата.

Броят им е $\tilde{V}_n^k = n^k$

8. Колко е броят на k-цифрените числа, записани с n цифри включително нулата?

В условието на задачата няма изискването числата да бъдат с различни цифри.

I начин. От броя на редиците с дължина k, записани с n цифри включително нулата, трябва да извадим броя на редиците с дължина $k-1$, записани с n цифри включително нулата, т.е.

$\tilde{V}_n^k - \tilde{V}_n^{k-1} = n^k - n^{k-1} = (n-1)n^{k-1}$.

II. начин.

Образуваме редици с дължина k, записани с n цифри включително нулата.

На първа позиция можем да поставим $n-1$ цифри (без нулата). На всяка от следващите $k-1$ позиции можем да поставим всяка от n-те цифри.

Броят им е $(n-1)\,n^{k-1}$.

2) Пермутации с повторение

11. Имаме две групи от еднакви елементи – едната с 3, а другата с 5 елемента.
Те могат да се наредят по $\widetilde{P}_8(3,5)=\dfrac{8!}{3!5!}=56$ начина.

12. Имаме три групи съответно с 1, 3 и 2 елемента и във всяка група елементите са еднакви. Броят на различните наредби е $\widetilde{P}_6(1,3,2)=\dfrac{6!}{1!3!2!}=60$.

3) Комбинации с повторение

17. а) кръговете не са наредени;

Имаме редици с дължина 6 съставени от три елемента и наредбата на елементите в редицата няма значение. Следователно редиците са комбинации с повторения от 3 елемента 6-ти клас. Броят им е $\widetilde{C}_3^6=\dfrac{(3+6-1)!}{6!2!}=28$.

б) кръговете са наредени?

Имаме редици с дължина 6 съставени от три елемента и елементите в редицата са подредени. Следователно редиците са вариации с повторения от 3 елемента 6-ти клас. Броят им е $\widetilde{V}_3^6=3^6=729$.

18. Имаме 10 топки. На всяка топка съпоставяме номера на кутията, в която ще попадне. Така получаваме редици с дължина 10 съставени от 5 елемента (номерата на кутиите). Наредбата на топките няма значение, защото са еднакви. Тогава броят на различните редици е $\widetilde{C}_5^{10}=\dfrac{(5+10-1)!}{10!4!}=\dfrac{14!}{10!4!}=1001$.

Общи задачи
Съединения с повторения

1. а) $\widetilde{V}_2^3 = 2^3 = 8$;

б) $\widetilde{V}_3^4 = 3^4 = 81$;

в) $\widetilde{V}_8^2 = 8^2 = 64$.

2. а) $\widetilde{P}_5(2,3) = \dfrac{5!}{2!3!} = 10$;

б) $\widetilde{P}_5(4,1) = \dfrac{5!}{4!1!} = 5$;

в) $\widetilde{P}_{10}(2,3,5) = \dfrac{10!}{2!3!5!} = 2520$.

3. а) $\widetilde{C}_2^3 = \dfrac{(2+3-1)!}{3!1!} = \dfrac{4!}{3!} = 4$;

б) $\widetilde{C}_3^3 = \dfrac{5!}{3!2!} = 10$;

в) $\widetilde{C}_3^2 = \dfrac{4!}{2!2!} = 6$;

г) $\widetilde{C}_1^5 = \dfrac{5!}{5!0!} = 1$;

д) $\widetilde{C}_5^1 = \dfrac{5!}{1!4!} = 5$;

е) $\widetilde{C}_1^n = \dfrac{n!}{n!0!} = 1$;

ж) $\widetilde{C}_n^1 = \dfrac{n!}{1!(n-1)!} = n$.

4. а) $\widetilde{P}_8(3,2,3) = \dfrac{8!}{3!2!3!} = 560$;

б) $\widetilde{V}_2^5 = 2^5 = 32$ и $\widetilde{C}_2^5 = \dfrac{6!}{5!1!} = 6$;

в) $\widetilde{C}_4^6 = \dfrac{9!}{6!3!} = 84$.

5. Множеството от 12 специалисти трябва да се разбие на 4 групи по 3 специалисти във всяка група. Броят на различните разбивки е

$$\widetilde{P}_{12}(3,3,3,3) = \frac{12!}{3!3!3!3!} = \frac{12!}{6^4}.$$

6. Имаме редици с дължина n от два елемента с повторения и елементите са наредени.

Броят им е $\widetilde{V}_2^n = 2^n$.

7. Имаме редици с дължина 4 от 10 елемента с повторения и наредени.

Броят им е $\widetilde{V}_{10}^{4}=10^4=10\,000$.

Може да разсъждаваме и така:

Търсим броя на 4-цифрените числа, записани с цифрите от 0 до 9 с повторения, като числата може да започват и с 0. Броят им е $\widetilde{V}_{10}^{4}=10^4=10\,000$.

8. Имаме редици с дължина 4 от 6 елемента, които може да се повтарят и са наредени.

Броят им е $\widetilde{V}_{6}^{4}=6^4=1296$.

9. Имаме редици с дължина 7 от два елемента (ези и тура) с повторения и наредени.

Броят им е $\widetilde{V}_{2}^{7}=2^7=128$.

10. а) a поне веднъж

Имаме редици с дължина 5 от 6 елемента с повторения ненаредени.

Единият елемент винаги е a, а останалите 4 елемента се избират от 6 (защото a може да се повтаря). Броят им е $\widetilde{C}_{6}^{4}=\dfrac{9!}{4!5!}=126$.

Може да разсъждаваме и така:

Ако от всички редици с дължина 5 от 6 елемента с повторения ненаредени, които са $\widetilde{C}_{6}^{5}$ извадим редиците, които не съдържат a, те са $\widetilde{C}_{5}^{5}$, ще получим редиците, които съдържат a поне веднъж: $\widetilde{C}_{6}^{5}-\widetilde{C}_{5}^{5}=\dfrac{10!}{5!5!}-\dfrac{9!}{5!4!}=\dfrac{9!}{5!4!}\left(\dfrac{10}{5}-1\right)=\dfrac{9!}{5!41}$.

б) a точно един път.

Имаме редици с дължина 5 от 6 елемента с повторения ненаредени.

Единият елемент винаги е a, а останалите 4 елемента се избират от 5 (защото a не може да се повтаря). Броят им е $\widetilde{C}_{5}^{4}=\dfrac{8!}{4!4!}=70$.

11. а) цифрите 3 и 5

$\widetilde{V}_{2}^{4}=2^4=16$

б) нечетните цифри

Нечетните цифри са $1,3,5,7,9$ – 5 на брой.

$\widetilde{V}_{5}^{4}=5^4=625$

в) четните цифри

Четните цифри са $0,2,4,6,8$.

$\widetilde{V}_{5}^{4}-\widetilde{V}_{5}^{3}=5^4-5^3=5^3(5-1)=4.5^3$.

12. а) a

C a започват толкова пермутации, колкото могат да се образуват с останалите букви и пред тях се постави a.

Броят им е $\widetilde{P}_5(3,2)=\dfrac{5!}{3!2!}=10$

б) bc

$\widetilde{P}_4(1,2,1)=\dfrac{4!}{1!2!1!}=12$.

в) bbc

$\widetilde{P}_3(1,1,1)=\dfrac{3!}{1!1!1!}=6$ или $P_3=3!=6$.

13. а) a^3bc^4

Произведението е $aaabcccc$.

$\widetilde{P}_8(3,1,4)=\dfrac{8!}{3!1!4!}=280$.

б) ab^{n-1}

$\widetilde{P}_n(1,n-1)=\dfrac{n!}{1!(n-1)!}=n$

в) $a^2b^nc^{n-1}$

$\widetilde{P}_{2n+1}(2,n,n-1)=\dfrac{(2n+1)!}{2!n!(n-1)!}$.

14. Имаме редици с дължина 7 от 5 елемента с повторения ненаредени.

Броят им е $\widetilde{C}_5^7=\dfrac{11!}{7!4!}=330$.

15. $\widetilde{P}_{10}(3,5,2)=\dfrac{10!}{3!5!2!}=2520$

16. $\widetilde{P}_6(2,1,1,1,1)=\dfrac{6!}{2!}=360$.

17. Имаме редици с дължина 30 от 4 елемента с повторения ненаредени (защото видът на стикерите няма значение).

Броят им е $\widetilde{C}_4^{30}=\dfrac{33!}{30!3!}=5456$.

19. Имаме редици с дължина 15 от 3 елемента с повторения ненаредени (защото чантите са еднакви).

Броят им е $\widetilde{C}_3^{15}=\dfrac{17!}{15!2!}=136$.

20. За разпределянето на 10 кестена имаме редици с дължина 10 от 3 елемента с повторения ненаредени. Броят им е $\widetilde{C}_3^{10}$.

За разпределянето на 8 ореха имаме редици с дължина 8 от 3 елемента с повторения ненаредени. Броят им е $\widetilde{C}_3^{8}$.

От принципа за умножение в комбинаториката търсеният брой е $\widetilde{C}_3^{10}.\widetilde{C}_3^{8} = \dfrac{12!}{10!2!}.\dfrac{10!}{8!2!} = 2970$.

21. Имаме елементите 3366666777.

Броят на различните редици, получени от нареждането на тези елементи е пермутации с повторения на 10 елемента от 3-ти клас, като в първата група има 2 елемента, във втората има 5 елемента и в третата има 3 елемента.

$\Rightarrow \widetilde{P}_{10}(2,5,3) = \dfrac{10!}{2!5!31} = 2520$.

22. В кутията има $5+4=9$ топки и извадката е с обем 9 без връщане, т.е. в редиците участват всичките 9 елемента. Редиците са съставени от две групи – едната с 5 елемента, а другата с 4 елемента.

$\Rightarrow$ Имаме пермутации с повторения на 9 елемента 2-ри клас, като в едната група има 5 елемента, а в другата 4 елемента.

Броят им е $\widetilde{P}_9(5,4) = \dfrac{9!}{5!4!} = 126$.

23. а) топките са еднакви

Имаме редици с дължина 6 от 2 елемента с повторения ненаредени (защото топките са еднакви).

Броят им е $\widetilde{C}_2^{6} = \dfrac{7!}{6!1!} = 7$.

б) топките са различни

Имаме редици с дължина 6 от 2 елемента с повторения наредени (защото топките са различими).

Броят им е $\widetilde{V}_2^{6} = 2^6 = 64$.

24. В условието няма изискване числата да бъдат с различни цифри.

Дадени са 5 различни цифри без нулата.

В първите три цифри може да участват всичките 5 цифри, т.е. вариации с повторения от 5 елемента 3 -ти клас. Броят на тези числа е $\widetilde{V}_5^{3}$.

Числата са четни следователно последната 4-та цифра се избира само от цифрите 2 и 4, т.е. последната цифра се избира по 2 начина.

От принципа за умножение в комбинаториката получаваме, че търсеният брой е

$\widetilde{V}_5^{3}.2 = 5^3.2 = 250$.

25. В условието няма изискване числата да бъдат с различни цифри.
Дадени са 6 различни цифри включително нулата. Образуват се 3-цифрени числа.

Редиците с дължина 3 от 6 елемента са $\widetilde{V}_6^3$. Тези от тях, които започват с 0 не са трицифрени числа и те трябва да бъдат извадени от общия брой.

Започващите с 0 може да се разглеждат като 2-цифрени числа, образувани от 6 цифри, на които е добавена първа цифра 0, т.е. $\widetilde{V}_6^2$.

Търсеният брой е $\widetilde{V}_6^3 - \widetilde{V}_6^2 = 6^3 - 6^2 = 6^2.5 = 180$.

26. Буквите на думата КАСИС образуват 4 групи съответно с 1, 1, 2, 1 елемента.

Броят на различните съчетания е $\widetilde{P}_5(1,1,2,1) = \dfrac{5!}{2!} = 60$.

27. Дадени са 6 цифри (не всичките различни) разделени в 3 групи съответно по 1, 3 и 2 цифри.
Образуват се 6-цифрени числа.

Броят им е $\widetilde{P}_6(1,3,2) = \dfrac{6!}{1!3!2!} = 60$.

28. Имаме редици с дължина 10 от 3 елемента с повторения ненаредени.

Броят им е $\widetilde{C}_3^{10} = \dfrac{12!}{10!2!} = 66$.

29. Имаме редици с дължина 20 от 3 елемента с повторения ненаредени.

Броят им е $\widetilde{C}_3^{20} = \dfrac{22!}{20!2!} = 231$.

30. Всички възможни случаи са редици с дължина 40 от 3 елемента с повторения ненаредени. Броят им е $\widetilde{C}_3^{40}$.

Ако точно един сок не е избран от никой от гостите, получаваме редици с дължина 40 от два елемента с повторения ненаредени. Броят им е $\widetilde{C}_2^{40}$.

Соковете са 3. Следователно благоприятните случаи са $3.\widetilde{C}_2^{40}$.

Търсената вероятност е $\dfrac{3.\widetilde{C}_2^{40}}{\widetilde{C}_3^{40}} = \dfrac{3.41!}{40!1!}.\dfrac{40!2!}{42!} = \dfrac{1}{7}$.

31 Имаме редици с дължина 7 с 2 елемента (горната част и долната част на плаката) с повторения ненаредени.

Броят им е $\widetilde{C}_2^{7} = \dfrac{8!}{7!1!} = 8$.

32. Броят на всички разпределения по проекти е броят на редиците с дължина 100 от 2 елемента с повторения ненаредени, т.е. $\widetilde{C}_2^{100} = \dfrac{101!}{100!\,1!} = 101$.

а) само по втора част

Броят на разпределенията по проектите само по втора част е $\widetilde{C}_1^{100} = 1$, т.е. всички ученици са избрали проект само по втора част, което е само една възможност.

Търсената вероятност е $\dfrac{1}{101}$.

б) само по една от частите

Броят на разпределенията по проектите само по първа или само по втора част е 2.

Търсената вероятност е $\dfrac{2}{101}$.