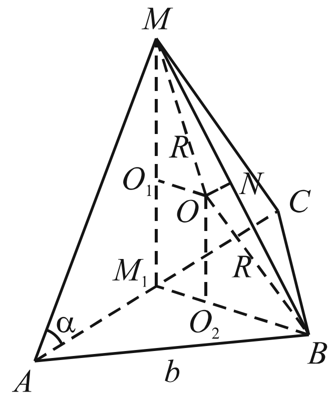


23. Около всяка триъгълна пирамида се описва сфера.

Нека $ABCM$ е триъгълна пирамида с основа равностранен ΔABC със страна b. Нека M_1 е средата на AC $\Rightarrow$ височината на пирамидата е $MM_1 = \frac{3}{2}b$

Нека O_1 и O_2 със центовете на описаната окръжности съответно около ΔACM и ΔABC.

Нека $O_1 \in g_1,\ g_1 \perp ACM$ и $O_2 \in g_2,\ g_2 \perp ABC$. Тогава центърът на сферата е $O = g_1 \cap g_2$.

$\Rightarrow M_1O_2OO_1$ е правоъгълник.

В ΔACM $AM_1 = \frac{b}{2}$, $MM_1 = \frac{3b}{2}$ $\Rightarrow$ $AM = CM = \frac{\sqrt{10}\ b}{2}$ и нека $MO_1 = R_1$.

$\Rightarrow \sin\angle MAC = \frac{MM_1}{AM} = \frac{3b}{2}.\frac{2}{\sqrt{10}b} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Прилагаме синусовата теорема за ΔACM $\Rightarrow$ $R_1 = \frac{1}{2}.\frac{CM}{\sin\angle MAC} = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{10}b}{2}.\frac{10}{3\sqrt{10}} = \frac{5b}{6}$.

От равностранния ΔABC намираме $BM_1 = \frac{\sqrt{3}b}{2},\ M_1O_2 = \frac{\sqrt{3}b}{6}$.

Сега от ΔMO_1O имаме $R^2 = R_1{}^2 + OO_1{}^2 = R_1{}^2 + M_1O_2{}^2 = \frac{25b^2}{36} + \frac{3b^2}{36} = \frac{28b^2}{36}$.

$\Rightarrow R = \frac{2\sqrt{7}b}{6} = \frac{\sqrt{7}b}{3}$

Обемът на кълбото е $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{28\sqrt{7}\pi b^3}{81}$.

24. Нека правилният тетраедър има страна a и височина h. Тогава:

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}\ a}{3}$$

Радиусът r на вписаното кълбо ще намерим по формулата $r = \frac{3V}{S_1}$.

$$V_T = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{\sqrt{6}a}{3} = \frac{\sqrt{2}\ a^3}{12}$$

$$S_1 = 4.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}a^2$$

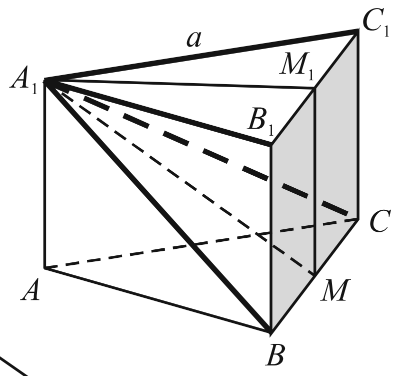
$\Rightarrow$ радиусът на вписаното кълбо е $r = \frac{3V_T}{S_1} = \frac{3\sqrt{2}a^3}{12.\sqrt{3}a^2} = \frac{\sqrt{6}a}{12}$.

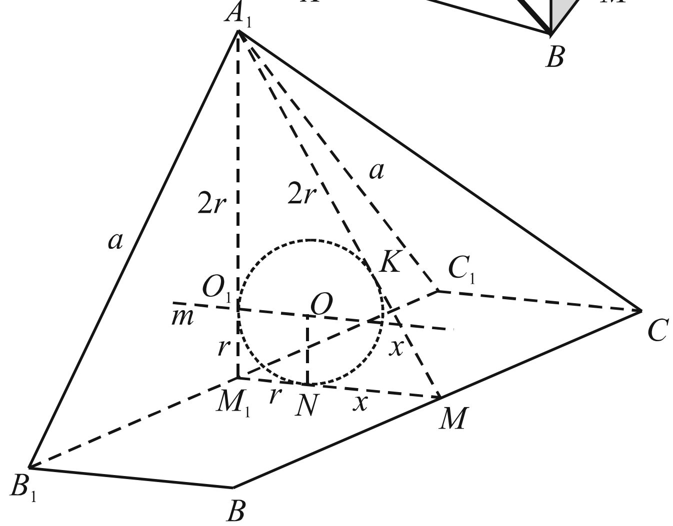
$$V_K = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4\pi}{3}.\frac{6\sqrt{6}a^3}{12.12.12} = \frac{\sqrt{6}\pi a^3}{6^3}\ .$$

Намираме отношението $\dfrac{V_T}{V_K} = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}.\dfrac{6^3}{\sqrt{6}\pi a^3} = \dfrac{6\sqrt{3}}{\pi}$.

Следователно обемът а правилния тетраедър е $\dfrac{6\sqrt{3}}{\pi}$ пъти по-голям от обема ба вписаното кълбо.

25. $BCC_1B_1A_1$ е пирамида с основа BCC_1B_1 и връх A_1.





Според условието в $BCC_1B_1A_1$ се вписва сфера и радиусът ѝ е r.

Стената $B_1C_1A_1$ е равностранен триъгълник, перпендикулярна на основата BCC_1B_1. Тогава $\angle B_1C_1A_1$ и $\angle C_1B_1A_1$ са линейни ъгли съответно на двустенните ъгли с ръб CC_1 и BB_1.

Нека O_1 е центърът на вписаната окръжност в $\Delta B_1C_1A_1$ и нека r_1 е радиусът ѝ.

Следователно ъглополовящите равнини на двустенните ъгли с ръб CC_1 и BB_1 се пресичат в права m, която минава през O_1 и е успоредна на CC_1 и BB_1, както и на правата MM_1, където M и M_1 са средите съответно на BC и B_1C_1

Центърът на вписаната сфера лежи на m. Тъй като точките от m са на разстояние $O_1M_1 = r_1$ от основата BCC_1B_1, то радиусът на вписаната сфера е $r = r_1$.

Равнината MM_1A_1 съдържа правата m, следователно тя пресича сферата в голяма окръжност, която е вписаната окръжност в ΔMM_1A_1 и се допира до MM_1 и до MA_1 съответно в точки N и K.

От равностранния $\Delta B_1C_1A_1$ имаме $O_1M_1 = r$ и $O_1A_1 = 2r$.

$\Rightarrow\ M_1N = r$ и $A_1K = 2r$.

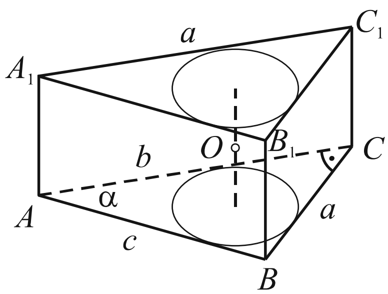
Нека $MN = MK = x$. Прилагаме питагоровата теорема за ΔMM_1A_1 :

$(x+2r)^2 = (x+r)^2 + 9r^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3r$. $\Rightarrow\ h = MM_1 = x + r = 4r$.

Равностранният ΔABC с радиус на вписаната окръжност r има страна $a = 2\sqrt{3}\ r$.

За търсения обем получаваме: $V = S_{ABC}.h = \dfrac{(2\sqrt{3}r)^2\sqrt{3}}{4}.4r = 12\sqrt{3}\ r^3$.

26. Нека $ABCA_1B_1C_1$ е права призма с основа правоъгълния ΔABC, $\angle C = 90°$, $\angle BAC = \alpha$.



В призмата може да се впише сфера $\Rightarrow$ радиусът ѝ е равен на радиуса r на вписаната окръжност в ΔABC и височината на призмата е $h = 2r$.

В правоъгълния ΔABC имаме:

$a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$ $\Rightarrow$ $2p = c(\sin\alpha + \cos\alpha + 1)$ $\Rightarrow$

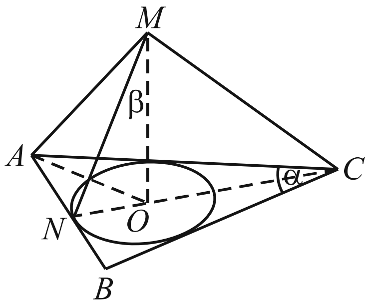
$$c = \frac{2p}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1}$$

$$r = p - c = p - \frac{2p}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1} = \frac{p(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1}.$$

Околната повърхнина на призмата е;

$$S = 2ph = 2p.2r = \frac{4p^2(\sin\alpha + \cos\alpha - 1)}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1}.$$

27. Нека $ABCM$ е триъгълна пирамида с връх M, $AC = BC$, $\angle ACB = \alpha$, $S_{ABC} = B$.



Височината на пирамидата сключва равни ъгли с околните стени $\Rightarrow$ M се проектира в центъра O на вписаната окръжност в ΔABC. Нека N е средата на AB $\Rightarrow$ $\angle NMO = \beta$.

От ΔANC $CN = \dfrac{AB}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$

$$\Rightarrow\ B = S_{ABC} = \frac{AB.CN}{2} = \frac{AB^2}{4\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow\ AB^2 = 4B\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2},\ AB = 2\sqrt{B\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

В ΔABC AO е ъглополовяща $\Rightarrow$ $\angle NAO = 45° - \dfrac{\alpha}{4}$.

В ΔANO $ON = r$ и $AN = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{B\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}$.

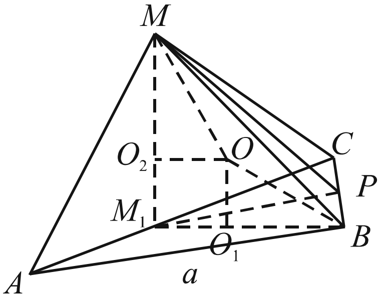
$$\Rightarrow\ r = AN\,\mathrm{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right) = \sqrt{B\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right).$$

От ΔMON: $MO = h = r\,\mathrm{cotg}\,\beta = \sqrt{B\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}\,\mathrm{tg}\left(45° - \dfrac{\alpha}{4}\right)\mathrm{cotg}\,\beta$.

$$\Rightarrow\ V = \frac{1}{3}B\sqrt{B\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}\,\mathrm{tg}\left(45° - \frac{\alpha}{4}\right)\mathrm{cotg}\,\beta.$$

28. Нека страната на ΔABC е a. По условие $MA = MC = AC = a$ $\Rightarrow \Delta ACM$ също е равностранен със страна a.

$(MAC) \perp (ABC)$ $\Rightarrow$ M се проектира в точка M_1, която е средата на AC.



Нека O_1 е центърът на ΔABC, а O_2 е центърът на ΔACM.

Центърът O на описаната сфера е пресечната точка на правата през O_1, перпендикулярна на (ABC) и правата през O_2, перпендикулярна на (ACM).

$\Rightarrow$ четириъгълникът $M_1O_1OO_2$ е квадрат със страна $M_1O_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

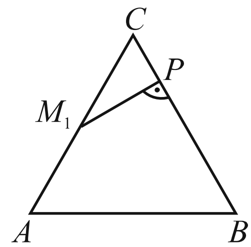
От ΔOO_1B имаме:

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2 \;\Rightarrow\; a = \frac{6}{5}.$$

Ще намерим радиуса r на вписаната сфера по формулата $r = \dfrac{3V}{S_1}$.

$$3V = S_{ABC}.MM_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2}{8}.$$

Нека MP е височина в околната стена BCM, $P \in BC$ $\Rightarrow$ $M_1P \perp BC$ (по теоремата за трите перпендикуляра).



От ΔM_1PC: $M_1P = M_1C.\sin 60^\circ = \dfrac{a}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$.

$$\Rightarrow\; MP = \sqrt{MM_1{}^2 + M_1P^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{15}}{4}.$$

$\Delta ABM \cong \Delta BCM$ по три страни.

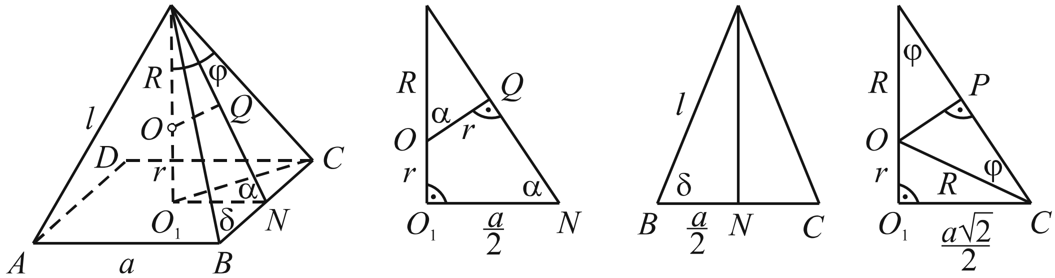
Тогава $S_{ABM} = S_{BCM} = \dfrac{BC.MP}{2} = \dfrac{1}{2}.a.\dfrac{a\sqrt{15}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{8}$.

$$\Rightarrow\; S_1 = 2.\frac{a^2\sqrt{15}}{8} + 2.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2\right)}{4}.$$

Окончателно за r получаваме:

$$r = \frac{3V}{S_1} = \frac{3a^3}{8}.\frac{4}{a^2\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+2\right)} = \frac{a\sqrt{3}\,(\sqrt{5}-2)}{2} = \frac{6}{5}.\frac{\sqrt{3}\,(\sqrt{5}-2)}{2} = \frac{3\sqrt{3}\,(\sqrt{5}-2)}{5}.$$

29. Нека $ABCDM$ е правилна четириъгълна пирамида с връх M и основа квадрат със страна a.



Следователно M се проектира в центъра O_1 на основата и $O \in MO_1$, където O е общият център на двете сфери.

Нека N е средата на BC. Ъгъл O_1NM е линеен ъгъл на двустенния ъгъл между равнините (BCM) и $(ABCD)$. Да означим $\angle O_1NM = \alpha$, $\angle O_1MC = \varphi$, $\angle MBC = \delta$, $MA = l$ и r и R радиусите на вписаната и описаната сфери.

$\Rightarrow OO_1 = OQ = r$ (където $OQ \perp MN$) и $OM = OC = R$

Последователно изразяваме тригонометрични функции на въведените ъгли.

$\cos\alpha = \dfrac{a}{2MN}$ (от ΔO_1NM)

$\dfrac{a}{2MN} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\delta}$ (от ΔBNM) $\quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\delta}$ или $\operatorname{tg}\delta = \dfrac{1}{\cos\alpha}$. (1)

$\cos\delta = \dfrac{a}{2\,l}$ (от ΔBNM)

$\sin\varphi = \dfrac{a\sqrt{2}}{2\,l}$ (от ΔMO_1C) $\quad\Rightarrow\quad \sqrt{2}\cos\delta = \sin\varphi$ (2)

$\cos 2\varphi = \dfrac{r}{R}$ (от ΔOO_1C)

$\cos\alpha = \dfrac{r}{R}$ (от ΔMOQ) $\quad\Rightarrow\quad \cos 2\varphi = \cos\alpha$. (3)

От равенство (3) $\Rightarrow$ $\cos\alpha = \cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$.

От равенство (2) $\Rightarrow$ $1 - 2\sin^2\varphi = 1 - 4\cos^2\delta = 1 - \dfrac{4}{1+\operatorname{tg}^2\delta}$.

От равенство (1) $\Rightarrow$ $1 - \dfrac{4}{1+\operatorname{tg}^2\delta} = 1 - \dfrac{4}{1+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}} = 1 - \dfrac{4\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + 1}$.

Окончателно получаваме тригонометричното уравнение

$$\cos\alpha = 1 - \frac{4\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha+1},\ \alpha \in (0°, 90°).$$

Полагаме $\cos\alpha = x$, $x \in (0,1)$

$\Rightarrow\ x = 1 - \dfrac{4x^2}{x^2+1} \ \Leftrightarrow\ x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$.

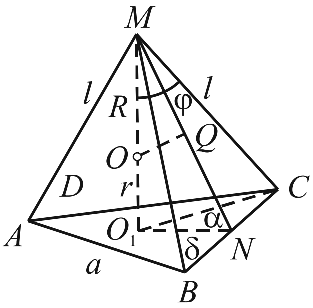
Непосредствено се проверява, че последното уравнение има корен $x = -1$ и като приложим схемата на Хорнер стигаме до уравнението

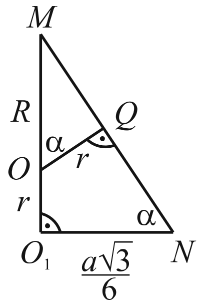
$(x+1)(x^2+2x-1) = 0$, което има корени $x_1 = -1$, $x_2 = -1-\sqrt{2}$ и $x_3 = -1+\sqrt{2}$

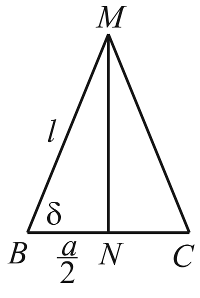
Тъй като $x \in (0,1)$, само $x_3 = -1+\sqrt{2}$ е решение.

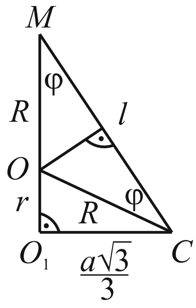
Тогава $\cos\alpha = \sqrt{2} - 1$.

30. Нека $ABCM$ е правилна триъгълна пирамида с връх M и основа равностранен триъгълник със страна a.









Следователно M се проектира в центъра O_1 на основата и $O \in MO_1$, където O е общият център на двете сфери.

Нека N е средата на BC и да означим $\angle O_1NM = \alpha$, $\angle O_1MC = \varphi$, $\angle MBC = \delta$, $MA = l$ и r и R радиусите на вписаната и описаната сфери.

$\Rightarrow OO_1 = OQ = r$ (където $OQ \perp MN$) и $OM = OC = R$

и $O_1N = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $O_1C = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, $BN = \dfrac{a}{2}$.

Последователно изразяваме тригонометрични функции на въведените ъгли.

$\cos\alpha = \dfrac{a\sqrt{3}}{6MN}$ (от ΔO_1NM)

$\dfrac{a}{2MN} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\delta}$ (от ΔBNM) $\qquad \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{a}{2MN}.\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\delta}.\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ или $\operatorname{tg}\delta = \dfrac{1}{\sqrt{3}\cos\alpha}$. (1)

$\cos\delta = \dfrac{a}{2\,l}$ (от ΔBNM)

$\sin\varphi = \dfrac{a\sqrt{3}}{3\,l}$ (от ΔMO_1C) $\qquad \Rightarrow 2\cos\delta = \sqrt{3}\sin\varphi$ или $\sin\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\delta$. (2)

$\cos 2\varphi = \dfrac{r}{R}$ (от ΔOO_1C)

$\cos\alpha = \dfrac{r}{R}$ (от ΔMOQ) $\qquad \Rightarrow \cos 2\varphi = \cos\alpha$. (3)

От равенство (3) $\Rightarrow$ $\cos\alpha = \cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$.

От равенство (2) $\Rightarrow$ $1 - 2\sin^2\varphi = 1 - 2.\dfrac{4}{3}\cos^2\delta = 1 - \dfrac{8}{3}.\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\delta}$.

От равенство (1) $\Rightarrow$ $1 - \dfrac{8}{3}.\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\delta} = 1 - \dfrac{8}{3}.\dfrac{3\cos^2\alpha}{3\cos^2\alpha + 1}$.

Окончателно получаваме тригонометричното уравнение

$$\cos\alpha = 1 - \frac{8\cos^2\alpha}{3\cos^2\alpha + 1},\ \alpha \in (0°, 90°).$$

Полагаме $\cos\alpha = x$, $x \in (0,1)$

$\Rightarrow \ x = 1 - \dfrac{8x^2}{3x^2+1} \ \Leftrightarrow 3x^3 + 5x^2 + x - 1 = 0$.

Непосредствено се проверява, че последното уравнение има корен $x = -1$ и като приложим схемата на Хорнер стигаме до уравнението

$(x+1)(3x^2+2x-1) = 0$, което има корени $x_1 = -1$, $x_2 = -1$ и $x_3 = \dfrac{1}{3}$

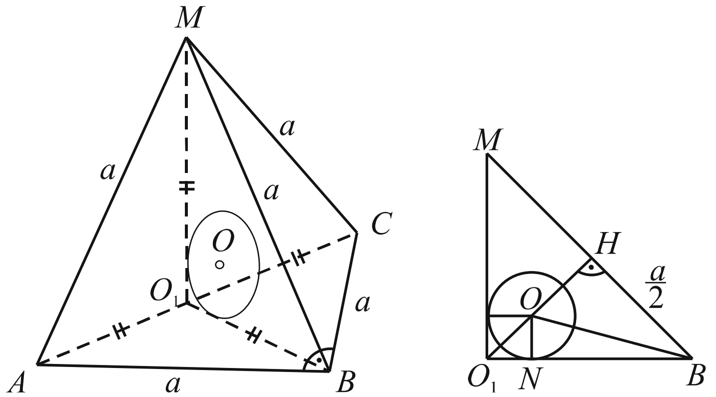
Тъй като $x \in (0,1)$, само $x_3 = \dfrac{1}{3}$ е решение.

Тогава $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

$\Rightarrow \ \dfrac{r}{R} = \cos\alpha = \dfrac{1}{3} \ \Rightarrow \ r = \dfrac{R}{3}$

$V_{вп.\ кълбо} = \dfrac{4}{3}\pi\dfrac{R^3}{27} = \dfrac{4}{81}\pi R^3$.

31. Всички околни ръбове са равни на a



$\Rightarrow$ M се проектира в центъра на описаната окръжност около ΔABC, който е средата O_1 на хипотенузата AC $\Rightarrow$ MO_1 е височината на пирамидата и стената (ACM) е перпендикулярна на основата (ABC).

Основата е равнобедрен правоъгълен ΔABC с катети $BA = BC = a$.

Имаме $MA = MB = MC = BA = BC = a$, $AC = a\sqrt{2}$, $MO_1 = BO_1 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Нека R е радиусът на вписаната сфера. Ще намерим R по формулата $R = \dfrac{3V}{S_1}$.

$3V = S_{ABBC}.MO_1 = \dfrac{a^2}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{4}$

$S_1 = 2S_{ABM} + 2S_{ABC} = 2.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + 2.\dfrac{1}{2}.a\sqrt{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{a^2(\sqrt{3}+2)}{2}$.

$\Rightarrow \ R = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{4}.\dfrac{2}{a^2(\sqrt{3}+2)} = \dfrac{\sqrt{2}a}{2(\sqrt{3}+2)} = \dfrac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})a}{2}$.

Центърът O на вписаната сфера лежи на ъглополовящата на правия ъгъл $\angle BO_1M$ и голяма окръжност на сферата е вписана в този ъгъл

ΔBO_1M е равнобедрен $\Rightarrow$ $O_1O \perp BM$ и ако $O_1O \cap BM = H$, търсеното разстояние е OH.

Нека $ON \perp BO_1$, $N \in BO_1$ $\Rightarrow$ $ON = O_1N = R$

Последователно намираме:

$$BN = BO_1 - R = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})a}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)a}{2} .$$

$$BO = \sqrt{R^2 + BN^2} = \sqrt{\frac{2(2-\sqrt{3})^2a^2}{4} + \frac{2(\sqrt{3}-1)^2a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}a}{2}\sqrt{11-6\sqrt{3}} .$$

$$OH = \sqrt{BO^2 - BH^2} = \sqrt{\frac{2a^2(11-6\sqrt{3})}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}\sqrt{7-4\sqrt{3}} .$$

Ще преобразуваме $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = \sqrt{4-4\sqrt{3}+3} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}$.

Окончателно получаваме.

$$OH = \frac{\sqrt{3}\,(2-\sqrt{3})\,a}{2}$$

32. В призмата е вписана сфера и нека радиусът ѝ е R.

$\Rightarrow$ $h = 2R$.

Ще използваме формулата $R = \dfrac{3V}{S_1}$.

$V = B.h = B.2R$

$\Rightarrow$ $S_1 = \dfrac{3V}{R} = \dfrac{3.B.2R}{R} = 6B$.

33. В призмата е вписана сфера и нека радиусът ѝ е R.

$\Rightarrow$ $h = 2R$ и радиусът на вписаната в основата окръжност също е R.

$\Rightarrow$ Височината на ромба е $2R$, тогава страната на ромба е $b = \dfrac{2R}{\sin 30°} = 4R$.

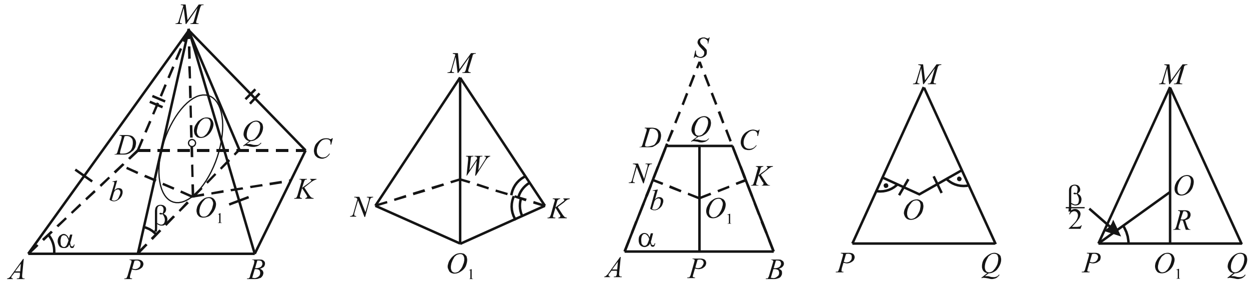
$\Rightarrow$ $S_{основа} = 4R.2R = 8R^2$

$V = S_{основа}.h = 8R^2.2R$ и тъй като по условие $V = 16$, то

$8R^2.2R = 16$, откъдето

$R = 1$ cm.

34. Нека P и Q са средите съответно на AB и CD $\Rightarrow$ PQ е симетралата както на AB, така и на CD.



Триъгълниците ABM и DCM са равнобедрени $\Rightarrow$ M се проектира в точка от PQ $\Rightarrow$ $(PQM)\perp AB$ и $(PQM)\perp CD$, откъдето следва, че $\angle QPM$ и $\angle PQM$ са линейни ъгли на двустенните ъгли между основата и съответно равнините ABM и DCM.

По условие равнините ABM и DCM сключват с основата равни ъгли $\Rightarrow$ $\angle QPM=\angle PQM=\beta$ $\Rightarrow \Delta PQM$ е равнобедрен $\Rightarrow M$ се проектира в средата O_1 на отсечката PQ.

Нека O е центърът на вписаната сфера. Ще докажем, че O лежи на височината MO_1.

Нека $O_1K\perp BC$ и $O_1N\perp AD$ ($K\in BC,\ N\in AD$) $\Rightarrow$ $O_1K=O_1N$ (трапецът е равнобедрен) $\Rightarrow$ $\Delta O_1KM\cong\Delta O_1NM$.

Нека KW ($W\in MO_1$) е ъглополовяща в ΔO_1KM $\Rightarrow$ NW е ъглополовяща в ΔO_1NM .

От друга страна ъглите $\angle O_1KM$ и $\angle O_1NM$ са линейни ъгли на двустенните ъгли съответно с ръбове BC и AD. Тогава ъглополовящите равнини на тези двустенни ъгли ще минават през W и през пресечната точка S на BC и AD.

$\Rightarrow$ точка $O\in WS$.

Правата WS лежи в равнината (PQM), защото PQ минава през S, а $W\in MO_1\subset(PQM)$

$\Rightarrow O$ лежи в равнината (PQM).

Разстоянието от O до MQ е разстоянието от O до равнината (DCM), защото перпендикулярът от O до MQ е перпендикулярен MQ и на DC ($DC\perp(PQM)$), т.е $d(O,MQ)=d(O,DCM)$.

Аналогично $d(O,MP)=d(O,ABM)$.

Тъй като O е центърът на вписаната сфера, то $d(O,DCM)=d(O,ABM)$ $\Rightarrow$ $d(O,MQ)=d(O,MP)$ и тъй като ΔPQM е равнобедрен, то $O\in MO_1$.

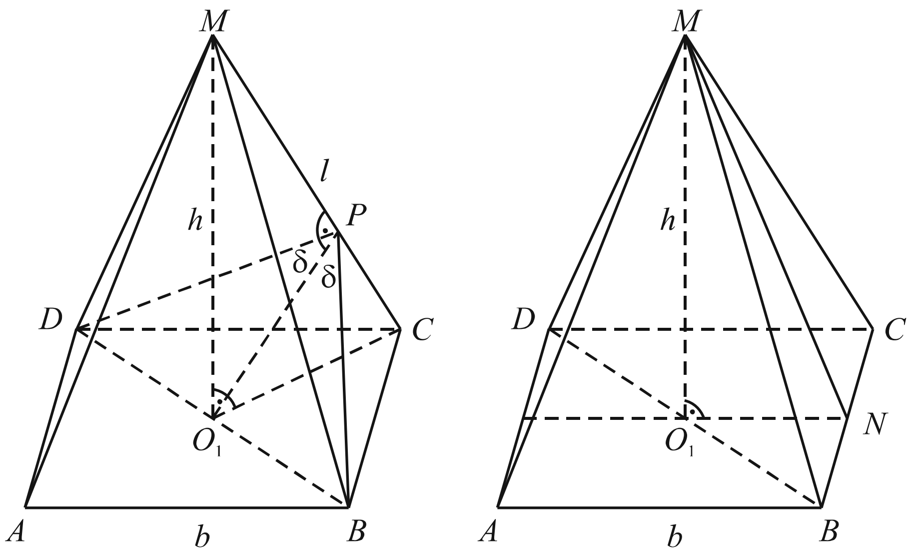
Тогава равнината PQM пресича вписаната сфера в голяма окръжност, която е вписаната окръжност в ΔPQM и O е центърът ѝ.

Имаме $PQ=b\sin\alpha$, $PO_1=\dfrac{PQ}{2}=\dfrac{b\sin\alpha}{2}$.

От ΔPO_1O намираме радиуса на сферата: $R=OO_1=\dfrac{PQ}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$ $\Rightarrow$ $R=\dfrac{b\sin\alpha\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}}{2}$.

35. За намиране на R ще използваме формулата $R=\dfrac{3V}{S_1}$.

Нека $ABCDM$ е правилна четириъгълна пирамида и върхът M се проектира в точка O_1.
$\Rightarrow\ MO_1=h$ и центърът O на сферата лежи на MO_1.



Означаваме с R радиуса на сферата, $AM=l$ и $AB=b$.
Нека равнината (ABP), $P\in MC$ е перпендикулярна на ръба MC $\Rightarrow$ $\angle BPD=2\delta$.

От ΔPO_1B: $\dfrac{O_1P}{O_1B}=\operatorname{cotg}\delta$.

От правоъгълния ΔMO_1C: $\dfrac{h}{l}=\dfrac{O_1P}{O_1C}=\dfrac{O_1P}{O_1B}=\operatorname{cotg}\delta$ (използвали сме, че $O_1C=O_1B$)

$\Rightarrow\ \dfrac{h}{l}=\operatorname{cotg}\delta\ \Rightarrow\ l=\dfrac{h}{\operatorname{cotg}\delta}=h\operatorname{tg}\delta$.

Нека N е средата на BC $\Rightarrow$ $MN\perp BC$.
Ще изразим b и MN чрез δ и h.
От ΔMO_1B:

$$O_1B^2=l^2-h^2,\quad \left(\frac{\sqrt{2}b}{2}\right)^2=\left(h\operatorname{tg}\delta\right)^2-h^2,\quad \frac{b^2}{2}=h^2\operatorname{tg}^2\delta-h^2,$$

$$b^2=2h^2(\operatorname{tg}^2\delta-1)\ \text{ и }\ b=\frac{\sqrt{2}h\sqrt{-\cos2\delta}}{\cos\delta}.$$

Ще уточним, че $-\cos2\delta>0$:

От правоъгълния ΔO_1CP $O_1P<O_1C=O_1B$.

Тогава от ΔO_1BP $\sin\delta=\dfrac{O_1B}{BP}>\dfrac{O_1P}{BP}=\cos\delta$

$\Rightarrow\ -\cos2\delta=\sin^2\delta-\cos^2\delta>0$

От ΔO_1NM:

$$MN^2=h^2+\frac{b^2}{4}=h^2+\frac{h^2}{2}(\operatorname{tg}^2\delta-1)=\frac{h^2}{2}(2+\operatorname{tg}^2\delta-1)=$$

$$=\frac{h^2}{2}(\operatorname{tg}^2\delta+1)=\frac{h^2}{2}\left(\frac{\sin^2\delta}{\cos^2\delta}+1\right)=\frac{h^2}{2}.\frac{1}{\cos^2\delta}.$$

$$\Rightarrow\ MN=\frac{\sqrt{2}h}{2\cos\delta}.$$

Сега изразяваме V и S_1.

$$3V=b^2h$$

$$S_1=b^2+\frac{4.MN.b}{2}=b(b+2MN)$$

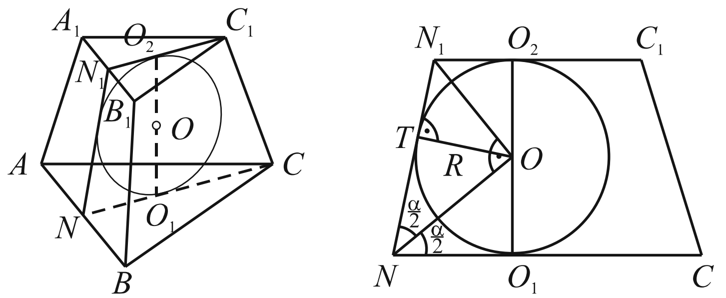
$$R=\frac{3V}{S_1}=\frac{b^2h}{b(b+2MN)}=\frac{bh}{b+2MN}.$$

Заместваме изразите за b и MN в израза за R.

$$R=\frac{\sqrt{2}h^2\sqrt{-\cos 2\delta}}{\cos\delta\left(\frac{\sqrt{2}h\sqrt{-\cos 2\delta}}{\cos\delta}+\frac{\sqrt{2}h}{\cos\delta}\right)}=\frac{h\sqrt{-\cos 2\delta}}{\sqrt{-\cos 2\delta}+1}=\frac{h\sqrt{-\cos 2\delta}}{1+\sqrt{-\cos 2\delta}}.\frac{1-\sqrt{-\cos 2\delta}}{1-\sqrt{-\cos 2\delta}}=$$

$$\frac{h\sqrt{-\cos 2\delta}\left(1-\sqrt{-\cos 2\delta}\right)}{1+\cos 2d}=\frac{h\left(\sqrt{-\cos 2\delta}+\cos 2\delta\right)}{2\cos^2\delta}.$$

36. Нека $ABCA_1B_1C_1$ е правилна триъгълна пресечена пирамида.



Да означим $AB=a$, $A_1B_1=b$, средите на AB и A_1B_1 съответно с N и N_1, центровете на голямата и малката основа съответно с O_1 и O_2.

Центърът на вписаната сфера O е средата на O_1O_2.

$\angle CNN_1$ е линеен ъгъл на двустенния ъгъл при основния ръб на долната основа.

Търси се $\operatorname{tg}\angle CNN_1$.

Имаме $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{4}{b^2\sqrt{3}}=\frac{a^2}{b^2}=4\ \Rightarrow\ a=2b$.

Равнината (NCC_1) пресича сферата в голяма окръжност, а пирамидата в трапеца NCC_1N_1.

Имаме $OT=OO_1=OO_2=R$.

NO и N_1O са ъглополовящи $\Rightarrow\ \angle NON_1=90°$.

Също така $NT=NO_1=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{b\sqrt{3}}{3}$ и $N_1T=N_1O_2=\frac{b\sqrt{3}}{6}$.

От метричните зависимости в правоъгълния ΔNON_1 получаваме:

$R^2 = OT^2 = NT.N_1T$ (виж чертежа)

$R^2 = \dfrac{b\sqrt{3}}{3}.\dfrac{b\sqrt{3}}{6} = \dfrac{b^2}{6}$ или $R = \dfrac{b}{\sqrt{6}}$.

От ΔNO_1O:

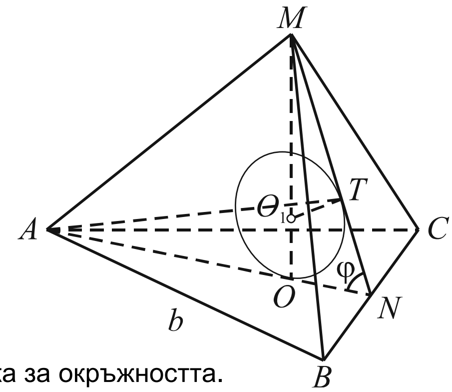
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{OO_1}{NO_1} = \frac{R}{NO_1} = \frac{b}{\sqrt{6}}.\frac{3}{b\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{2.\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{1-\dfrac{2}{4}} = 2\sqrt{2}.$$

До тук

37. Нека O_1 е центърът на вписаната сфера, $O_1 \in MO$.

Нека N е средата на BC. Равнината (ANM) пресича сферата в голяма окръжност, която се допира до AN и MN съответно в точките O и T.



От ΔABC: $ON = \dfrac{b\sqrt{3}}{6}$.

$\Rightarrow NT = ON = \dfrac{b\sqrt{3}}{6}$ – като допирателни през външна точка за окръжността.

От ΔONM: $MN = \sqrt{MO^2 + NO^2} = \sqrt{2b^2 + \dfrac{3b^2}{36}} = \dfrac{5\sqrt{3}b}{6}$.

$\Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{ON}{MN} = \dfrac{b\sqrt{3}}{6}.\dfrac{6}{5\sqrt{3}b} = \dfrac{1}{5}$, където $\angle ANT = \varphi$.

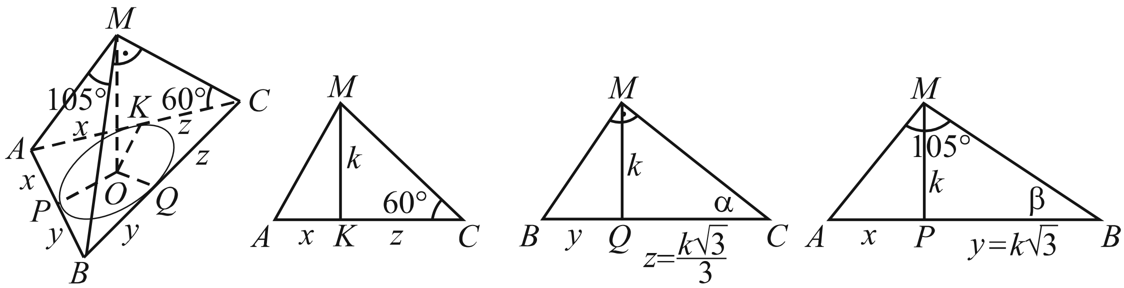
Прилагаме косинусовата теорема за ΔANT:

$$AT^2 = AN^2 + NT^2 - 2AN.NT.\cos\varphi =$$

$$= \frac{b^2 3}{4} + \frac{b^2 3}{36} - 2.\frac{b\sqrt{3}}{2}.\frac{b\sqrt{3}}{6}.\frac{1}{5} = b^2\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{12} - \frac{6}{60}\right) = b^2\frac{44}{60} = b^2\frac{11}{15}$$

$$\Rightarrow AT = b\sqrt{\frac{11}{15}}.$$

38. Околните стени образуват равни двустенни ъгли с основата на пирамидата



$\Rightarrow$ точката O е центърът на вписаната окръжност в ΔABC и нека допирните ѝ точки до AB, BC и AC са съответно P, Q и K.

Тогава отсечките MP, MQ и MK са височини в околните стени и $MP = MQ = MK = k$ и също така $AP = AK = x$, $BP = BQ = y$ и $CQ = CK = z$.

От ΔKCM: $z = k \operatorname{cotg} 60° = \dfrac{\sqrt{3}k}{3}$.

От ΔBCM: $\dfrac{y}{k} = \dfrac{k}{z} = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}k$.

От ΔABM: $\operatorname{tg} \angle ABM = \dfrac{k}{y} = \dfrac{k}{\sqrt{3}k} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle ABM = 30° \Rightarrow \angle BAM = 45° \Rightarrow x = k$.

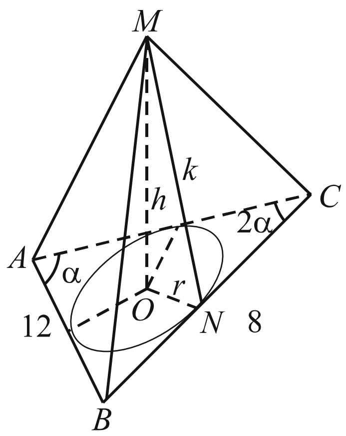
Тогава:

$$S_{ABO} = \frac{(x+y)\ r}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)\ k\ r}{2}.$$

$$S_{ABC} = pr = (x+y+z)r = k\left(1+\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)r = \frac{(4\sqrt{3}+1)\ k\ r}{3}.$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABO}}{S_{ABC}} = \frac{(\sqrt{3}+1)kr}{2} \cdot \frac{3}{(4\sqrt{3}+3)kr} = \frac{3.(\sqrt{3}+1)(4\sqrt{3}-3)}{2.39} = \frac{9+\sqrt{3}}{26}.$$

39. Нека $ABCM$ е триъгълна пирамида с връх M, за която:
$AB = 12$, $BC = 8$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = 2\alpha$, $\alpha \in (0°, 90°)$.



Околните стени сключват с основата равни ъгли $\Rightarrow$ M се проектира в центъра O на вписаната в основата окръжност.

Прилагаме синусовата теорема за ΔABC:

$\dfrac{8}{\sin\alpha} = \dfrac{12}{\sin 2\alpha}$. Получаваме тригонометричното уравнение $2\sin 2\alpha = 3\sin\alpha$, $\alpha \in (0°, 90°)$.

$4\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin\alpha = 0$, $\quad \sin\alpha(4\cos\alpha - 3) = 0$

Тъй като $\alpha \in (0°, 90°)$, $\sin\alpha > 0 \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{3}{4}$ и $\sin\alpha = +\dfrac{\sqrt{7}}{4}$.

Намираме $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \dfrac{3\sqrt{7}}{4} - \dfrac{4.7\sqrt{7}}{64} = \dfrac{5\sqrt{7}}{16}$.

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{12.8.\sin 3\alpha}{2} = \frac{12.8.5\sqrt{7}}{2.16} = 15\sqrt{7}.$$

Отново от синусовата теорема за ΔABC намираме:

$$\frac{AC}{\sin(180° - 3\alpha)} = \frac{8}{\sin\alpha} \Rightarrow AC = \frac{8\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 10.$$

$$\Rightarrow P_{ABC} = 12 + 8 + 10 = 30.$$

От формулата $S = pr$ получаваме $15r = 15\sqrt{7}$, $r = \sqrt{7}$.

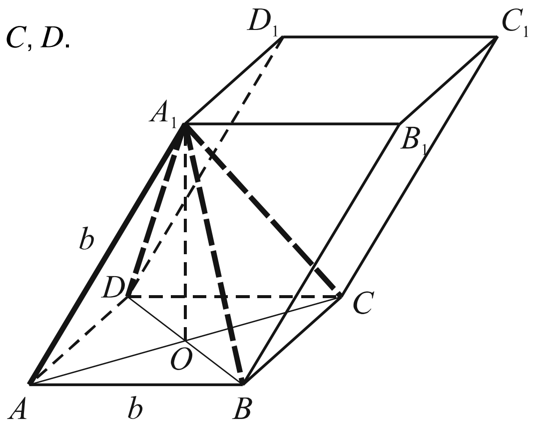
От ΔONM намираме височината $MO = \sqrt{k^2 - r^2} = \sqrt{16-7} = 3$.

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}.15.\sqrt{7} = 15\sqrt{7}$ cm^3.

40 Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е паралелепипед, за който $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ са квадрати със страна b, а околните стени са ромбове $\Rightarrow$ $AA_1 = AB = b$.

Нека върхът A_1 е равноотдалечен от върховете A, B, C, D.

$\Rightarrow$ $AA_1 = BA_1 = CA_1 = DA_1 = b$ и A_1 се проектира в точка O, за която $O = AC \cap BD$.



Тогава $AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{2}b}{2}$ $\Rightarrow$

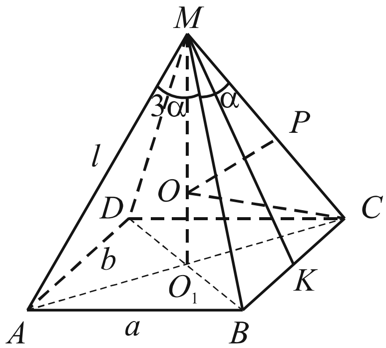
$$h = A_1O \;\Rightarrow\; h = \sqrt{AA_1^{\,2} - AO^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{2}} = \frac{b\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Rightarrow V = S_{ABCD}.h = \frac{b^2.\sqrt{2}b}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}b^3 .$$

41. Нека $ABCDM$ е пирамида с онова правоъгълника $ABCD$.

$AB = a$, $BC = b$, $\angle AMB = 3\alpha$ и $\angle BMC = \alpha$, $\alpha \in (0°, 60°)$.

Всички околни ръбове са равни $\Rightarrow$ M се проектира в пресечната точка O_1 на диагоналите на правоъгълника, $AC \cap BD = O_1$.



Центърът O на описаната сфера лежи на MO_1 .

От ΔABM и ΔBCM имаме:

$$\frac{a}{2l} = \sin\frac{3\alpha}{2} \;\Rightarrow\; l = \frac{a}{2\sin\frac{3\alpha}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{b}{2l} = \sin\frac{\alpha}{2} \;\Rightarrow\; l = \frac{b}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Получаваме тригонометричното уравнение:

$$\frac{b}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{3\alpha}{2}} \;\Leftrightarrow\; b\sin\frac{3\alpha}{2} - a\sin\frac{\alpha}{2} = 0,\; b\left(3\sin\frac{\alpha}{2} - 4\sin^3\frac{\alpha}{2}\right) - a\sin\frac{\alpha}{2} = 0$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\left(3b - 4b\sin^2\frac{\alpha}{2} - a\right) = 0$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} \neq 0 \;\Rightarrow\; \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{3b-a}{4b}.$$

$$l = \frac{b}{2\sin\frac{\alpha}{2}} \;\Rightarrow\; l^2 = \frac{b^2}{4.\frac{3b-a}{4b}} = \frac{b^3}{3b-a}.$$

От ΔMO_1C:

$$MO_1 = \sqrt{l^2 - O_1C^2} = \sqrt{\frac{b^3}{3b-a} - \frac{a^2+b^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^3 + b^3 - 3a^2b + ab^2}}{2\sqrt{3b-a}}.$$

$$R = \frac{l^2}{2MO_1} = \frac{b^3}{3b-a}.\frac{2\sqrt{3b-a}}{2\sqrt{a^3+b^3-3a^2b+ab^2}} = \frac{b^3}{\sqrt{3b-a}\sqrt{a^3+b^3-3a^2b+ab^2}}.$$

42. Нека $ABCDM$ е пирамида с основа трапеца $ABCD$.

Околните ръбове са равни $\Rightarrow$ M се проектира в центъра O_1 на описаната окръжност около трапеца. По условие радиусът на тази окръжност е 2.

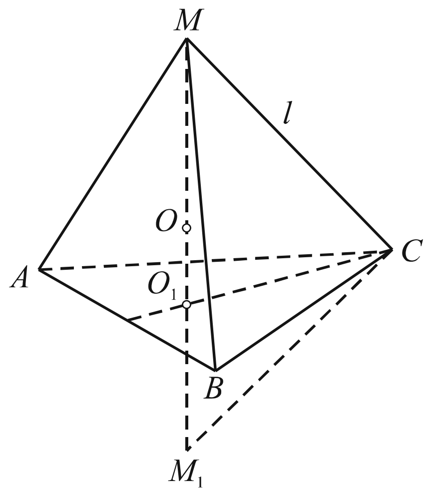
Височината на пирамидата е $h = MO_1 = 4$.

За радиуса R на описаната сфера имаме формулата $R = \dfrac{l^2}{2h}$.

От ΔMO_1C намираме околния ръб: $l^2 = MO_1^{\,2} + O_1C^2 = 16 + 4 = 20$

$\Rightarrow$ $R = \dfrac{20}{2.4} = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$ cm.

43. Нека $ABCM$ е правилна триъгълна пирамида с връх M.



Нека проекцията на M е O_1.

От формулата $R = \dfrac{l^2}{2h}$ намираме $MO_1 = h = \dfrac{l^2}{2R}$.

Равнината MCO_1 пресича сферата в голяма окръжност и нека $MM_1 = 2R$.

От правоъгълния ΔMM_1C имаме:

$CO_1^{\,2} = h(2R - h)$.

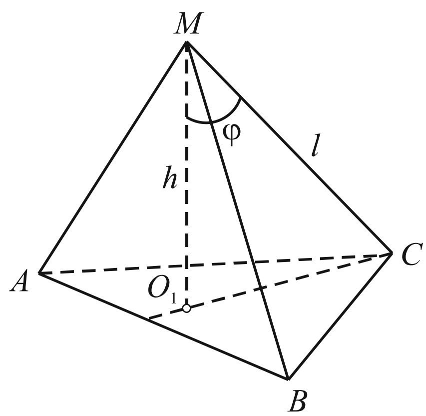
$\Rightarrow$ $AB^2 = 3CO_1^{\,2} = 3h(2R - h)$.

или $AB^2 = 3.\dfrac{l^2}{2R}\left(2R - \dfrac{l^2}{2R}\right) = \dfrac{3l^2(4R^2 - l^2)}{4R^2}$.

Тогава $S_{ABC} = \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}\ l^2(4R^2 - l^2)}{16R^2}$.

$\Rightarrow V = \dfrac{1}{3}\dfrac{3\sqrt{3}\ l^2(4R^2 - l^2)}{16R^2}.\dfrac{l^2}{2R} = \dfrac{\sqrt{3}\ l^4}{32R^3}(4R^2 - l^2)$.

Второ решение



Имаме $R = \dfrac{l^2}{2h}$ $\Rightarrow$ $MO_1 = h = \dfrac{l^2}{2R}$.

Означаваме $\angle CMO_1 = \varphi$.

От ΔMCO_1: $\cos\varphi = \dfrac{h}{l} = \dfrac{l}{2R}$.

Намираме $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi = \dfrac{4R^2 - l^2}{4R^2}$.

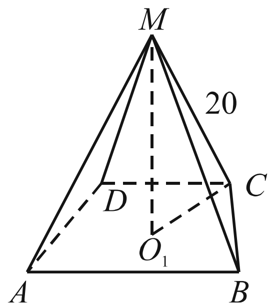
$CO_1 = l\sin\varphi$ $\Rightarrow$ $AB^2 = 3CO_1^{\,2} = 3l^2\sin^2\varphi$.

За лицето на ΔABC получаваме:

$S_{ABC} = \dfrac{\sqrt{3}AB^2}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}\ l^2\sin^2\varphi}{4} = \dfrac{3\sqrt{3}\ l^2}{4}.\dfrac{4R^2 - l^2}{4R^2}$.

$\Rightarrow$ $V = \dfrac{1}{3}.\dfrac{3\sqrt{3}\ l^2}{4}.\dfrac{4R^2 - l^2}{4R^2}.\dfrac{l^2}{2R} = \dfrac{\sqrt{3}\ l^4}{32R^3}.(4R^2 - l^2)$.

44. Нека $ABCDM$ е четириъгълна пирамида с основа трапеца $ABCD$.

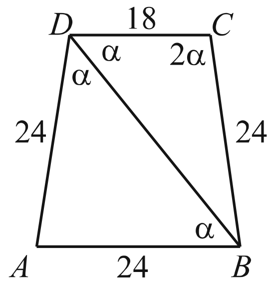


Околните ръбове са равни $\Rightarrow$ около пирамидата се описва сфера, а около трапеца се описва окръжност и M се проектира в центъра O_1 на тази окръжност.

$\Rightarrow$ $ABCD$ е равнобедрен трапец и тъй като BD е ъглополовяща на ΔADC, то $AD = AB = BC = 24$.

По условие $P_{ABCD} = 90 \quad \Rightarrow \quad 3AB + 18 = 90\,,\quad AB = 24$.

Ще намерим радиуса R_1 на описаната окръжност около трапеца, като използваме синусовата теорема.



Нека $\angle ADC = 2\alpha\,,\quad \Rightarrow \quad \angle ADB = \angle BDC = \alpha$.

Прилагаме синусовата теорема за ΔDBC:

$$\frac{18}{\sin(180° - 3\alpha)} = \frac{24}{\sin\alpha} \quad \text{или} \quad \frac{18}{\sin 3\alpha} = \frac{24}{\sin\alpha}\,,\quad 3\sin\alpha = 4\sin 3\alpha\,.$$

Като използваме формулата $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ получаваме:

$\sin\alpha(16\sin^2\alpha - 9) = 0$.

Тъй като $\alpha \in (0°, 90°)$, то $\sin\alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha = \dfrac{9}{16}\,,\quad \sin\alpha = \dfrac{3}{4}$.

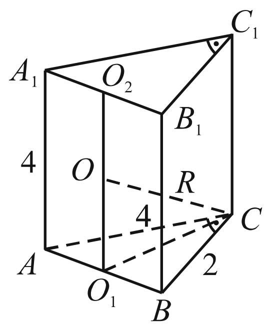
Отново от синусовата теорема за ΔDBC намираме:

$\dfrac{24}{\sin\alpha} = 2R_1\,,\quad R_1 = 16$.

Сега от $\Delta\,\Delta MO_1C$ получаваме $h = MO_1 = \sqrt{l^2 - R_1^{\,2}} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12$.

Окончателно $R = \dfrac{l^2}{2h} = \dfrac{20^2}{2.12} = \dfrac{50}{3}$.

45. Нека $ABCA_1B_1C_1$ е дадената права призма.



ΔABC е правоъгълен и нека $BC = 2$, $AC = 4 \quad \Rightarrow \quad AB = 2\sqrt{5}$.

Центърът O на описаната сфера е средата на отсечката O_1O_2, където O_1 и O_2 са средите съответно на хипотенузите AB и A_1B_1.

$\Rightarrow \quad O_1O_2 = h = 4$ и $CO_1 = \dfrac{AB}{2} = \sqrt{5}$.

От ΔOO_1C имаме:

$R = \sqrt{OO_1^{\,2} + CO_1^{\,2}} = \sqrt{4+5} = 3$

46. Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е даденият паралелепипед и нека a, b и c са ръбовете му.

Диагоналът d на паралелепипеда е $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

По условие:

$$\begin{aligned} &a^2 + b^2 = 20 \\ &b^2 + c^2 = 19 \quad \Rightarrow \quad 2(a^2 + b^2 + c^2) = 50 \quad \Rightarrow \quad d^2 = 25\,,\quad d = 5. \\ &a^2 + c^2 = 11 \end{aligned}$$

За радиуса на описаната сфера имаме $R = \dfrac{d}{2} = 2{,}5$ cm.

47. Нека $ABCA_1B_1C_1$ е дадената пресечена пирамида.

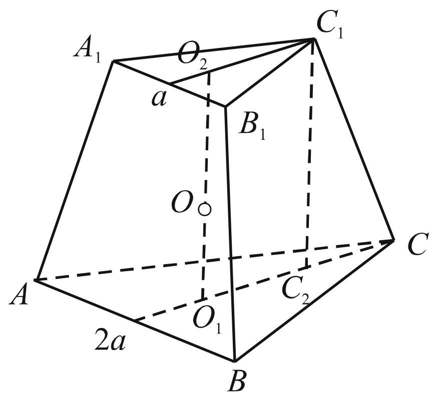
Центърът O на описаната сфера лежи на височината O_1O_2, където O_1 и O_2 са центровете на двете основи.

Нека $C_1C_2 \perp CO_1$, $C_2 \in CO_1$.

Нека $A_1B_1 = a \;\Rightarrow\; AB = 2a$.

$\Rightarrow\; C_1O_2 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ и $CO_1 = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow CC_2 = O_1C_2 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

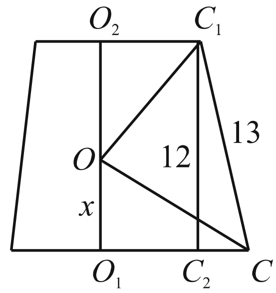


От ΔC_1C_2C имаме $CC_2 = 5$

$\Rightarrow \dfrac{a\sqrt{3}}{3} = 5$, $a = 5\sqrt{3}$, $CO_1 = 10$ и $C_1O_2 = 5$.

Нека $OO_1 = x$.

От ΔOO_1C и ΔOO_2C_1, в които $OC = OC_1 = R$ получаваме:



$OO_1^{\,2} + CO_1^{\,2} = OO_2^{\,2} + C_1O_2^{\,2}$

$x^2 + 100 = (12 - x)^2 + 25$

$x = \dfrac{69}{24} = \dfrac{23}{8}$.

$\Rightarrow\; R = \sqrt{x^2 + CO_1^{\,2}} = \sqrt{\dfrac{23^2}{8^2} + 100} = \dfrac{\sqrt{6929}}{8} = \dfrac{13\sqrt{41}}{8}$.

48. Центърът O на описаната сфера е пресечна точка на перпендикулярите, издигнати от центровете O_1 и O_2 на описаните окръжности съответно около $ABCD$ и ABM.

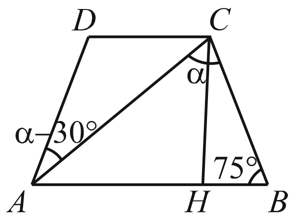
Трапецът $ABCD$ е вписан в окръжност следователно е равнобедрен.

Нека N е средата на $AB \Rightarrow\; h = MN$.

Нека R_1 е радиусът на описаната окръжност около $ABCD$ и $\angle ACB = \alpha$, $\alpha \in (0°, 180°)$.

От синусовата теорема за ΔABC и за ΔACD:

$\dfrac{AB}{\sin\alpha} = 2R_1$ и $\dfrac{CD}{\sin(\alpha - 30°)} = 2R_1$



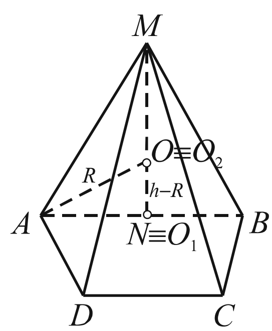
Като вземем предвид, че $CD = \dfrac{\sqrt{3}}{2}AB$, получаваме:

$\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - 30°)} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{3}\sin\alpha = 2(\sin\alpha\cos 30° - \cos\alpha\sin 30°)$

$\sqrt{3}\sin\alpha = 2\sin\alpha\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 2\cos\alpha\dfrac{1}{2}$

$\cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 90°$.



Следователно AB е диаметър на описаната окръжност около $ABCD$

$\Rightarrow\; O_1 \equiv N$ и $O \equiv O_2$.

$\Rightarrow$ центърът на описаната сфера съвпада с центъра на описаната окръжност около ΔABC.

Да означим $AB = a$. От ΔANO имаме:

$$R^2 = (h-R)^2 + \frac{a^2}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2}{4} = 2Rh - h^2 .$$

Нека $CH \perp AB$ е височината на трапеца $\Rightarrow$ $BH = \dfrac{AB-CD}{2} = \dfrac{a - \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{a(2-\sqrt{3})}{4}$.

Като използваме, че $\operatorname{tg} 75° = 2+\sqrt{3}$, от ΔBHC намираме:

$$CH = BH \operatorname{tg} 75° = \frac{a(2-\sqrt{3})}{4}.(2+\sqrt{3}) = \frac{a}{4}.$$

$$\Rightarrow \ S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2}.CH = \frac{a + \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2}.\frac{a}{4} = \frac{a^2}{4}.\frac{(2+\sqrt{3})}{4} = (2Rh-h^2).\frac{(2+\sqrt{3})}{4}.$$

а) $V = \dfrac{1}{3}S_{ABCD}.h = \dfrac{1}{3}.(2Rh-h^2).\dfrac{(2+\sqrt{3})}{4}.h = \dfrac{2+\sqrt{3}}{12}(2Rh^2 - h^3)$.

б) Да означим $h = x$ и да разгледаме функцията

$f(x) = 2Rx^2 - x^3$, $x \in (0, 2R)$.

$f'(x) = 4Rx - 3x^2 = x(4R-3x) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{4R}{3}$.

В интервала $(0,2R)$ f' има единствен корен $x_2 = \dfrac{4R}{3}$, в който f има локален максимум

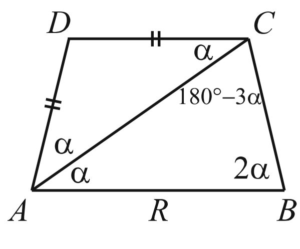
$$\Rightarrow \max_{(0,2R)} f(x) = f_{\max} = f\left(\frac{4R}{3}\right).$$

$$\Rightarrow \max V = \frac{2+\sqrt{3}}{12}\left[2R\left(\frac{4R}{3}\right)^2 - \left(\frac{4R}{3}\right)^3\right] = \frac{2+\sqrt{3}}{12}\left[\frac{32R^3}{9} - \frac{64R^3}{27}\right] = \frac{8(2+\sqrt{3})R^3}{81}.$$

49. Нека O е центърът на сферата и O_1 е центърът на описаната окръжност около трапеца.

Имаме $OA = OB = OC = OD \ \Rightarrow \ O$ се проектира в O_1. Търсеното разстояние е OO_1.

Тъй като $AD = DC$ и $AB \parallel CD$, то $\angle DAC = \angle ACD = \angle BAD = \alpha$ (т.е диагоналите са ъглополовящи на острите ъгли на трапеца.)



Нека R_1 е радиусът на описаната окръжност около трапеца.

От синусовата теорема за ΔABC имаме:

$$\frac{AB}{\sin(180° - 3\alpha)} = 2R_1 \quad \Rightarrow \quad R_1 = \frac{R}{2\sin 3\alpha}.$$

От ΔAO_1O:

$$OA^2 = AO_1^2 + OO_1^2$$

$$R^2 = R_1^2 + OO_1^2$$

$$\Rightarrow OO_1 = \sqrt{R^2 - R_1^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4\sin^2 3\alpha}} = \frac{R\sqrt{4\sin^2 3\alpha - 1}}{2\sin 3\alpha}.$$

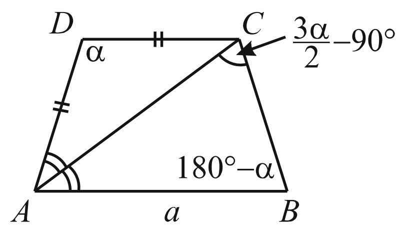
50. Околните ръбове сключват с височината равни ъгли $\Rightarrow$ околните ръбове са равни помежду си и M се проектира в центъра O_1 на описаната окръжност около $ABCD$ (който е равнобедрен).

За трапеца $ABCD$ имаме $AD = BC = CD$ следователно:

диагоналите са ъглополовящи на острите ъгли;

ъгълът между диагоналите е $180° - \alpha$;

$\angle ACB = \frac{3\alpha}{2} - 90°$.



Нека R_1 е радиусът на описаната окръжност около $ABCD$.

От синусовата теорема за ΔABC имаме:

$$\frac{AB}{\sin\left(\frac{3\alpha}{2} - 90°\right)} = \frac{AC}{\sin(180° - \alpha)} = 2R_1,$$

$$\frac{a}{-\cos\frac{3\alpha}{2}} = \frac{AC}{\sin\alpha} = 2R_1.$$

$$\Rightarrow AC = \frac{a\sin\alpha}{-\cos\frac{3\alpha}{2}} \text{ и } R_1 = \frac{a}{-2\cos\frac{3\alpha}{2}}.$$

Тогава $S_{ABCD} = \frac{AC.BD.\sin(180° - \alpha)}{2} = \frac{a^2\sin^3\alpha}{2\cos^2\frac{3\alpha}{2}}$.

В ΔMO_1B $\angle O_1MB = 30°$.

$$\Rightarrow h = MO_1 = \operatorname{cotg} 30° BO_1 = \sqrt{3}R_1 = \frac{\sqrt{3}a}{-2\cos\frac{3\alpha}{2}}.$$

а) $V = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sin^3\alpha}{2\cos^2\frac{3\alpha}{2}}.\frac{\sqrt{3}a}{-2\cos\frac{3\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}.\frac{\sin^3\alpha}{-\cos^3\frac{3\alpha}{2}}$.

Ще представим израза за обема и в друг вид, като преобразуваме израза $\cos\frac{3\alpha}{2}$.

$$\cos\frac{3\alpha}{2} = \cos\left(\alpha + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\alpha - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\alpha - 1 + \cos\alpha\right) =$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\alpha - 1\right) =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\alpha - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\alpha - \cos 60°\right) =$$

$$= -4\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-60^\circ}{2}\sin\frac{\alpha+60^\circ}{2}.$$

$$\Rightarrow V=\frac{\sqrt{3}a^3}{12}.\left(\frac{\sin\alpha}{-\cos\frac{3\alpha}{2}}\right)^3=\frac{\sqrt{3}a^3}{12}.\left(\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cancel{\cos\frac{\alpha}{2}}}{4\cancel{\cos\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\alpha-60^\circ}{2}\sin\frac{\alpha+60^\circ}{2}}\right)^3=$$

$$=\frac{\sqrt{3}a^3}{96}.\frac{\sin^3\frac{\alpha}{2}}{\sin^3\frac{\alpha-60^\circ}{2}\sin^3\frac{\alpha+60^\circ}{2}}.$$

б) ΔMO_1B е правоъгълен с 30° $\Rightarrow$ $BM=2BO_1=2R_1=\dfrac{a}{-\cos\frac{3\alpha}{2}}$.

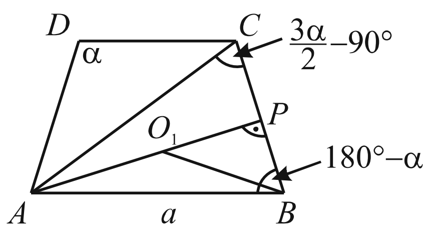
В ΔMOB $OM=OB=R$ $\Rightarrow$ $\dfrac{BM}{2R}=\cos 30^\circ$ $\Rightarrow$ $R=\dfrac{BM}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}a}{-3\cos\frac{3\alpha}{2}}$.

$$V_{кълбо}=\frac{4\pi}{3}.\frac{3\sqrt{3}a^3}{-27\cos^3\frac{3\alpha}{2}}=\frac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}.\frac{1}{-\cos^3\frac{3\alpha}{2}}.$$

или $V_{кълбо}=\dfrac{4\sqrt{3}\pi a^3}{27}.\dfrac{1}{4^3\cos^3\frac{\alpha}{2}\sin^3\frac{\alpha-60^\circ}{2}\sin^3\frac{\alpha+60^\circ}{2}}=$

$$=V_{кълбо}=\frac{\sqrt{3}\pi a^3}{432}.\frac{1}{\cos^3\frac{\alpha}{2}\sin^3\frac{\alpha-60^\circ}{2}\sin^3\frac{\alpha+60^\circ}{2}}.$$

в) Нека $BC\perp MA$



Проекцията на MA в равнината $ABCD$ е AO_1

$\Rightarrow$ $AO_1\perp BC$ по теоремата за трите перпендикуляра.

Нека $AO_1\cap BC=P$.

Ще изразим по два начина $\angle BAP$.

От ΔABP $\angle BAP=90^\circ-(180^\circ-\alpha)=\alpha-90^\circ$.

От друга страна $\angle ACB=\dfrac{3\alpha}{2}-90^\circ$

$\Rightarrow$ централният $\angle AO_1B=2\angle ACB=3\alpha-180^\circ$

$\Rightarrow$ $\angle BAP=\dfrac{180^\circ-(3\alpha-180^\circ)}{2}=180^\circ-\dfrac{3\alpha}{2}$

Получаваме равенството

$$\alpha-90^\circ=180^\circ-\frac{3\alpha}{2}$$

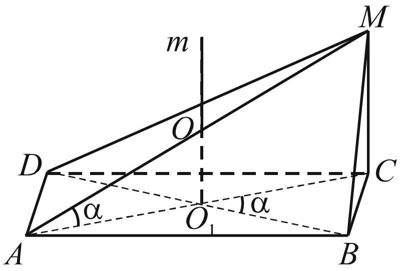
$$\frac{5\alpha}{2}=270^\circ,\quad \alpha=108^\circ.$$

51. Нека $ABCDM$ е дадената пирамида с връх M.

Нека $AC \cap BD = O_1$, $MC \perp (ABC)$

$\Rightarrow \angle BO_1C = \alpha$ и $\angle MAC = \alpha$.

Тъй като $DC < AC$ и $BC < AC$, то най-големият околен ръб е AM.



Нека правата m минава през точка O_1 и $m \perp (ABC) \Rightarrow$ всички точки от m са на равни разстояния от върховете на основата.

Освен това $m \parallel MC$ $\Rightarrow m$ лежи в равнината ACM и следователно пресича AM и да означим пресечната им точка с O. Тогава OO_1 е средна отсечка в ΔACM $\Rightarrow$ O е средата на $AM \Rightarrow O$ е на равни разстояния от върховете на пирамидата, т.е O е центърът на описаната сфера и да означим радиуса ѝ с R

$\Rightarrow$ $AO = MO = R$ $\Rightarrow$ $MC = 2R\sin\alpha$ и $AC = 2R\cos\alpha$

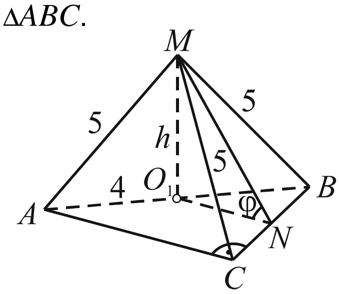
$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AC^2 \sin\alpha}{2} = 2R^2\cos^2\alpha\sin\alpha$$

$$V = \frac{1}{3}.2R^2\cos^2\alpha\sin\alpha.2R\sin\alpha = \frac{R^3}{3}.\sin^2 2\alpha.$$

52. По условие $MA = MB = MC$ $\Rightarrow$ около пирамидата се описва сфера и нека O е центърът ѝ.

Върхът M се проектира в центъра O_1 на описаната окръжност около ΔABC.

$\Rightarrow O_1$ е средата на хипотенузата AB,, $O \in MO_1$.



$\Rightarrow$ $MO_1 = h = \sqrt{25-16} = 3$.

$$\Rightarrow \quad R = \frac{l^2}{2h} = \frac{25}{6} > 3.$$

а) Получихме, че $MO_1 < R$ $\Rightarrow$ точка O е външна за отсечката MO_1 $\Rightarrow$ центърът O на сферата е вън от $ABCM$.

б) Нека $\angle ABC = 45°$

Нека N е средата на BC $\Rightarrow$ $O_1N \perp BC$ $\Rightarrow MN \perp BC$ по теоремата за трите перпендикуляра.

$\Rightarrow \angle MNO_1 = \varphi = \angle(ABC, MBC)$.

$$AC = BC = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad O_1N = \frac{BC}{2} = 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{MO_1}{O_1N} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

в) Нека $\angle ABC = 45°$

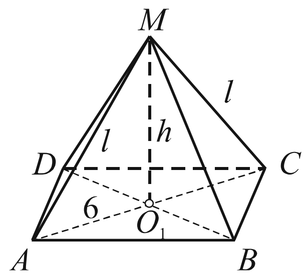
$$MN = \sqrt{MO_1^{\,2} + O_1N^2} = \sqrt{9+8} = \sqrt{17}$$

$$S_1 = S_{ABC} + S_{ABM} + 2S_{BCM} = \frac{32}{2} + \frac{3.8}{2} + 2.\frac{4\sqrt{2}.\sqrt{17}}{2} = 28 + 4\sqrt{34} = 4(7+\sqrt{34})\ \text{cm}^2.$$

$$V = \frac{1}{3}.16.3 = 16\ \text{cm}^3.$$

53. Нека $ABCDM$ е дадената пирамида с връх M.

M се проектира в центъра на квадрата O_1, $MO_1 = h$, $R = 12$.



AO_1 е радиусът на окръжността, описана около основата на пирамидата $\Rightarrow$ $AO_1 = 6$.

$R = 12 = \dfrac{l^2}{2h}$ $\Rightarrow$ $l^2 = 24h$.

От ΔAO_1M : $l^2 = h^2 + 36$.

Получаваме квадратно уравнение за h:

$h^2 - 24h + 36 = 0$, $h_1 = 6(2+\sqrt{3})$, $h_2 = 6(2-\sqrt{3})$.

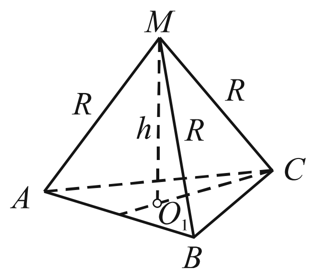
$\Rightarrow V_1 = \dfrac{1}{3}.\dfrac{144}{2}.6(2+\sqrt{3}) = 144(2+\sqrt{3})$

$V_2 = \dfrac{1}{3}.\dfrac{144}{2}.6(2-\sqrt{3}) = 144(2-\sqrt{3})$.

54. Нека $ABCM$ е дадената пирамида с връх M, $AB = b$.

Нека радиусът на описаното кълбо е R $\Rightarrow$ $MA = MB = MC = R$.

Нека O_1 е центърът на ΔABC, M се проектира в O_1, $MO_1 = h$.



$R = \dfrac{l^2}{2h}$ или $R = \dfrac{R^2}{2h}$ $\Rightarrow h = \dfrac{R}{2}$ $\Rightarrow$ $\angle O_1CM = 30°$ (от ΔMO_1C):

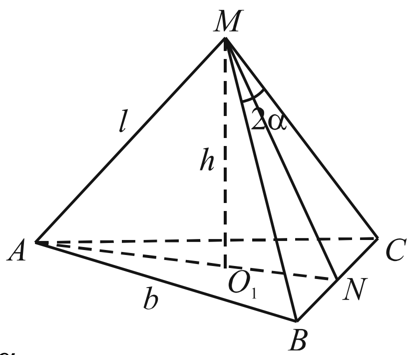
$\Rightarrow$ $CO_1 = R\cos 30° = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

От ΔABC $CO_1 = \dfrac{b\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{R\sqrt{3}}{2} = \dfrac{b\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$ $R = \dfrac{2b}{3}$

$\Rightarrow$ $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4\pi}{3}.\dfrac{8b^3}{27} = \dfrac{32}{81}\pi b^3$.

55. Нека $ABCM$ е дадената пирамида с връх M, $\angle BMC = 2\alpha$.

Нека O_1 е центърът на ΔABC, M се проектира в O_1, $MO_1 = h$ и центърът на сферата $O \in MO_1$.



$R = \dfrac{l^2}{2h}$, $l^2 = 2hR$

Нека $AB = BC = AC = b$ и N е средата на BC.

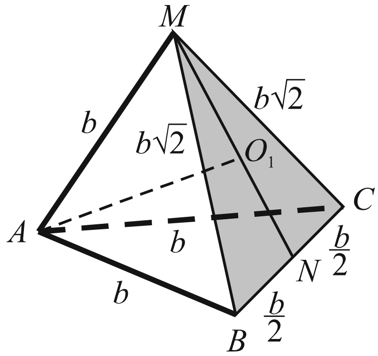
От ΔBNM: $BN = l\sin\alpha$ $\Rightarrow$ $b = 2l\sin\alpha$ и $MN = l\cos\alpha$.

От ΔABC: $O_1N = \dfrac{b\sqrt{3}}{6} = \dfrac{\sqrt{3}\ l\sin\alpha}{3}$.

От ΔMO_1N: $MO_1^2 + O_1N^2 = MN^2$ или $h^2 + \dfrac{l^2\sin^2\alpha}{3} = l^2\cos^2\alpha$

$l^2\left(\dfrac{3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{3}\right) = h^2$, $\quad 2hR\left(\dfrac{3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{3}\right) = h^2$

$\Rightarrow h = \dfrac{2R(3-4\sin^2\alpha)}{3}.\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{2R(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)}{3\sin\alpha}$. Окончателно $h = \dfrac{2R\sin 3\alpha}{3\sin\alpha}$.



56. Да разгледаме пирамидата с основа ΔBCM и връх A.

Околните ѝ ръбове са равни $AM = AB = AC = b$.

Следователно върхът A се проектира в центъра O_1 на описаната окръжност около ΔBCM, т.е центърът на описаната сфера ще лежи на AO_1 и нека R е радиусът ѝ.

$\Rightarrow R = \dfrac{b^2}{2AO_1}$.

Нека N е средата на BC.

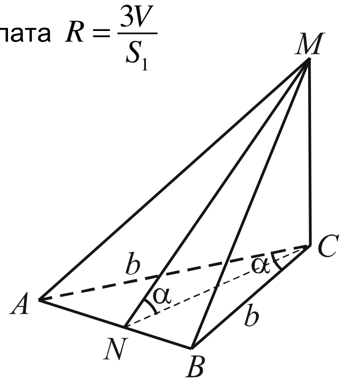
От равнобедрения ΔBCM с бедра $MB = MC = b\sqrt{2}$ и основа $BC = b$ намираме:

$MN = \dfrac{b\sqrt{7}}{2}$ и $MO_1 = \dfrac{2b}{\sqrt{7}}$.

От ΔAO_1M: $AO_1 = b\sqrt{\dfrac{3}{7}}$

$\Rightarrow R = \dfrac{b^2}{2AO_1} = \dfrac{b^2\sqrt{7}}{2b\sqrt{3}} = \dfrac{b\sqrt{21}}{6}$.

57. За намиране на радиуса на описаната сфера ще използваме формулата $R = \dfrac{3V}{S_1}$



Нека N е средата на $AB \Rightarrow \angle MNC = \alpha$.

От ΔABC:

$CN = b\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $AB = 2b\sin\dfrac{\alpha}{2}$ и $S_{ABC} = \dfrac{b^2\sin\alpha}{2}$.

От ΔMNC:

$h = MC = CN\,\mathrm{tg}\,\alpha = b\cos\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha \Rightarrow S_{BCM} = \dfrac{b^2\cos\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2}$.

Ортогоналната проекция на ΔABM е $\Delta ABC \Rightarrow S_{ABM} = \dfrac{S_{ABC}}{\cos\alpha} = \dfrac{b^2\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \dfrac{b^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2}$

$$S_1 = S_{ABC} + S_{ABM} + 2S_{BCM} = \frac{b^2\sin\alpha}{2} + \frac{b^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2} + \frac{2b^2\cos\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2} =$$

$$= \frac{b^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos\alpha}{2} + \frac{b^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2} + \frac{2b^2\cos\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2} = \frac{b^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2}\left(\cos\alpha + 1 + 2\cos\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= .\frac{b^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2}\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2\cos\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{b^2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2}.2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + 1\right) = 2b^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cos^{\wedge 2}\frac{\alpha}{4}.$$

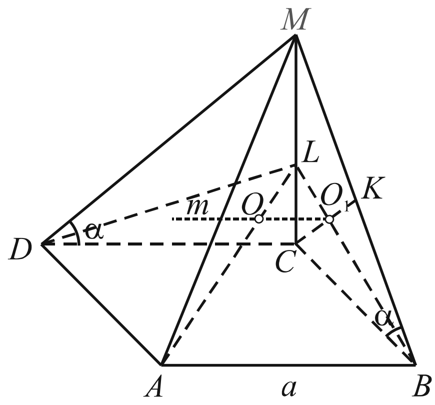
$$3V = \frac{b^2\sin\alpha}{2}.b\cos\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b^3\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2}.$$

$$R=\frac{3V}{S_1}=\frac{b^3\sin\alpha\cancel{\cos\frac{\alpha}{2}}\,\cancel{\operatorname{tg}\alpha}}{2}\cdot\frac{1}{2b^2\cancel{\operatorname{tg}\alpha}\,\cancel{\cos\frac{\alpha}{2}}\cos^2\frac{\alpha}{4}}=$$

$$=\frac{b\sin\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{4}}=\frac{b\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{4}}=b\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

58. Имаме $DC\perp AD$ и от теоремата за трите перпендикуляра $\Rightarrow$ $DM\perp AD$

$\Rightarrow$ $\angle MDC$ и аналогично $\angle MBC$ са линейни ъгли на двустенните ъгли съответно с ръб AD и ръб AB.



$\Rightarrow$ $\angle MDC=\angle MBC=\alpha$.

$\Delta DCM\cong\Delta BCM$ $\Rightarrow$ ъглополовящите на $\angle MDC$ и $\angle MBC$ се пресичат в точка L от MC.

$\Rightarrow$ L лежи на пресечницата на ъглополовящите равнини на двустенните ъгли с ръб AD и с ръб AB.

Тези ъглополовящи равнини имат и втора обща точка – точката A.

$\Rightarrow$ правата AL е пресечница на ъглополовящите равнини на двустенните ъгли с ръб AD и с ръб AB.

$\Rightarrow$ всяка точка от AL е на равни разстояния от равнините $ABCD$, ADM и ABM, т.е ако $X\in AL$, то $d(X,ABCD)=d(X,ADM)=d(X,ABM)$.

Да отбележим, че ъглополовящата равнина на двустенния ъгъл с ръб AB е равнината (ABL).

Да разгледаме ΔBCM.

Нека CK ($K\in BM$) е ъглополовяща на $\angle BCM$ и нека $CK\cap BL=O_1$, която е центърът на вписаната окръжност в ΔBCM.

Ъгъл BCM е линеен ъгъл на правия двустенен ъгъл с ръб DC

$\Rightarrow$ ъглополовящата равнина λ на двустенния $\angle(DCM,ABCD)$ с ръб DC съдържа CK, а значи и точка O_1. Но $O_1\in BL\subset(ABL)$ $\Rightarrow$ ъглополовящите равнини λ и (ABL) имат обща точка $\Rightarrow$ имат и пресечница, която да означим с m и която съдържа точката O_1.

Равнините λ и (ABL) съдържат двойка успоредни прави $AB\parallel CD$ $\Rightarrow$ пресечницата им $m\parallel AB\parallel CD$.

Поучихме, че в ΔABL през O_1 е прекарана правата m, която е успоредна на AB $\Rightarrow$ m пресича AL и нека $O=m\cap AL$ и да означим $d(O,ABCD)=R$.

И така получихме:

$O\in AL$ $\Rightarrow$ $d(O,ABCD)=d(O,ADM)=d(O,ABM)=R$.

$O\in m\subset\lambda$ $\Rightarrow$ $d(O,DCM)=d(O,ABCD)=R$.

Остава да покажем, че O е на разстояние R и от (BCM).

Имаме $OO_1 \equiv m \parallel AB \perp (BCM) \quad \Rightarrow \quad OO_1 = d(O, BCM)$.

В ΔDAL постояваме $OO_2 \perp DL \parallel AD \perp (DCM)$ $(O_2 \in DL) \Rightarrow OO_2 = d(O, DCM) = R$.

Тъй като $\Delta OO_1L \cong \Delta OO_2L$, то $OO_1 = OO_2 = R \quad \Rightarrow \quad d(O, BCM) = R$.

Следователно съществува точка – точката O, която е на равни разстояния от стените на пирамидата, т.е. в пирамидата може да се впише сфера и тя е с център O и радиус R.

Ще покажем, че проекцията на сферата в равнината (BCM) е вписаната окръжност в ΔBCM.

Тъй като $OO_1 = d(O, BCM)$, то O се проектира в точка O_1.

Нека сферата се допира до стената (ABM) в точка $T \quad \Rightarrow \quad OT = R$, $OT \perp (ABM)$ и T е единствената обща точка на сферата с (ABM).

Тъй като (ABM) съдържа правата $AB \perp (BCM)$, то $(ABM) \perp (BCM)$ и стената (ABM) ще се проектира в правата BM. Това означава, че проекцията T_1 на точка T ще лежи на BM, $O_1T_1 = OT = R$ (защото $OT \parallel (BCM)$) и T_1 е единствената точка от проекцията на сферата, която лежи на BM.

Аналогично доказваме, че върху правите BC и MC има единствени точки от проекцията на сферата в равнината (BCM), които са на разстояние R от O_1.

Следователно проекцията на сферата в равнината (BCM) е вписаната окръжност в ΔBCM и радиусът ѝ е равен на радиуса R на сферата.

Така задачата се свежда до намиране на радиуса на вписаната окръжност в ΔBCM с остър $\angle CBM = \alpha$ и катет $BC = a$.

BO_1 е ъглополовяща в ΔBCM

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{a-R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = a.\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.\frac{1}{1+\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{a\sin\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}.$$