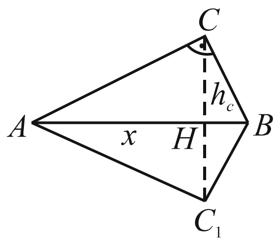
Общи задачи
Геометрични модели

Ротационни тела



1. а) $c = 25$ cm, $V = 1200\pi$ cm^3

Полученото тяло представлява два конуса с обща основа с радиус $r = h_c$ – височината към хипотенузата на дадения триъгълник. Сборът от височините на конусите е равен на хипотенузата c.

Тогава обемът на тялото е $V = \dfrac{\pi h_c^2 c}{3}$.

$\Rightarrow\ 1200\pi = \dfrac{\pi h_c^2.25}{3}$, $h_c^2 = \dfrac{3600}{25} = 144$, $h_c = 12\ \Rightarrow\ r = 12$.

В правоъгълния триъгълник да означим с x проекцията върху хипотенузата на един от катетите.

$\Rightarrow h_c^2 = x(c-x)$ или $144 = x(25-x)$, $x^2 - 25x + 144 = 0$, $x_1 = 9$ и $x_2 = 16$.

Тогава образуващите на двата конуса са:

$l_1 = \sqrt{144+81} = \sqrt{225} = 15$ и $l_2 = \sqrt{144+256} = \sqrt{400} = 20$.

Повърхнината на тялото е сбор от околните повърхнини на двата конуса:

$S = \pi r l_1 + \pi r l_2 = \pi r(l_1 + l_2) = \pi 12.35 = 420\pi$ cm^2.

б) $c = 13$ cm, $V = \dfrac{1200\pi}{13}$ cm^3

Както в подусловие а) намираме

$V = \dfrac{\pi h_c^2 c}{3}$, $\dfrac{1200\pi}{13} = \dfrac{\pi h_c^2.13}{3}$, $r = h_c = \dfrac{60}{13}$

и $h_c^2 = x(c-x)$, $\dfrac{3600}{13^2} = x(13-x)$, $13^2 x^2 - 13^3 x + 60^2 = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{13^3 \pm \sqrt{13^6 - 4.13^2.60^2}}{2.13^2} = \frac{13^2 \pm \sqrt{13^4 - 4.60^2}}{2.13} = \frac{13^2 \pm \sqrt{(13^2 - 2.60)(13^2 + 2.60)}}{2.13} = \frac{13^2 \pm 7.17}{2.13},$$

$x_1 = \dfrac{25}{13}$, $x_2 = \dfrac{144}{13}$.

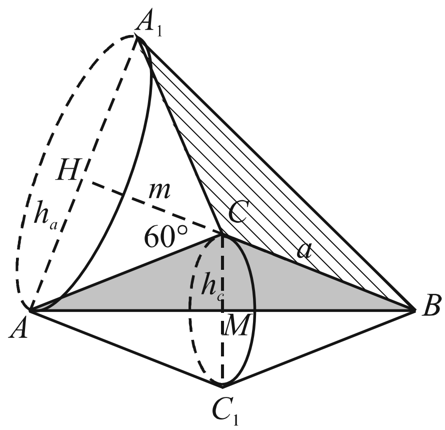
Образуващите на двата конуса са:

$l_1 = \sqrt{\dfrac{25^2}{13^2} + \dfrac{60^2}{13^2}} = \dfrac{65}{13} = 5$ и $l_2 = \sqrt{\dfrac{144^2}{13^2} + \dfrac{60^2}{13^2}} = \dfrac{12\sqrt{144+25}}{13} = \dfrac{12.13}{13} = 12$.

Повърхнината на тялото е сбор от околните повърхнини на двата конуса:

$S = \pi r l_1 + \pi r l_2 = \pi r(l_1 + l_2) = \pi \dfrac{60}{13}.17 = \dfrac{1020\pi}{13}$ cm^2.

2. а) $120°$



Нека е даден ΔABC, $\angle ACB = 120°$, който е завъртян около бедрото $BC = a$.

Нека A_1 е симетричната на A относно BC, $AA_1 \cap BC = H \Rightarrow AH = h_a$ и нека $CH = m$.

Полученото тяло е образувано от конус с осно сечение ABA_1, радиус h_a и височина $BH = a + m$ и конус с осно сечение ACA_1, с радиус h_a и височина $CH = m$. Обемът на тялото е разлика о обемите на двата конуса.

Тогава $V_1 = \dfrac{\pi h_a^2(a+m)}{3} - \dfrac{\pi h_a^2 m}{3} = \dfrac{\pi h_a^2 a}{3}$.

Нека сега ΔABC е завъртян около основата $AB = c$.

Нека C_1 е симетричната на C относно AB и $CC_1 \cap AB = M \Rightarrow CM = C_1M = h_c$.

Полученото тяло е съставено от два конуса с обща основа с радиус h_c и височина $\dfrac{c}{2}$.

Тогава $V_2 = \dfrac{\pi h_c^2 c}{3.2} + \dfrac{\pi h_c^2 c}{3.2} = \dfrac{\pi h_c^2 c}{3}$.

$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi h_a^2 a}{\pi h_c^2 c} = \dfrac{h_a.h_a a}{h_c.h_c c} = \dfrac{h_a}{h_c}$ – използвали сме, че $h_a a = h_c c$.

Имаме $h_a = a\sin 60° = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ и $h_c = \dfrac{a}{2}$.

$\Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{h_a}{h_c} = \dfrac{a\sqrt{3}.2}{2a} = \sqrt{3}$.

б) 2α

Както в подусловие а), ако $2\alpha > 90°$ обемът V_1 е разлика от обемите на два конуса, а ако $2\alpha < 90°$ обемът V_1 е сбор от обемите на два конуса, но и в двата случая, както и когато $2\alpha = 90°$, получаваме, че $V_1 = \dfrac{\pi h_a^2 a}{3}$.

При завъртане около AB имаме $V_2 = \dfrac{\pi h_c^2 c}{3}$ (както в а)).

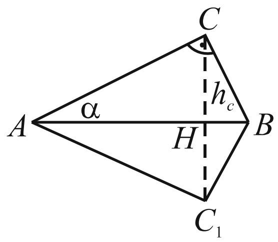
$\Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{h_a}{h_c}$.

Намираме $h_a = a\sin 2\alpha$ и $h_c = a\cos\alpha$

$\Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{h_a}{h_c} = \dfrac{a\sin 2\alpha}{a\cos\alpha} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2\sin\alpha$.

3. По условие $ch_c = 2S$.

Правоъгълният ΔABC е завъртян около хипотенузата AB и нека C_1 е симетричната на C относно AB.



Полученото тяло е съставено от два конуса с обща основа с радиус $h_c = CH$ и височини AH и AH .

Обемът на тялото е:

$$V = \frac{\pi h_c^{\,2} AH}{3} + \frac{\pi h_c^{\,2} BH}{3} = \frac{\pi h_c^{\,2} c}{3} = \frac{\pi h_c\, 2S}{3}.$$

Остава да изразим h_c чрез S и дадения ъгъл α. Последователно намираме:

$$b = \frac{h_c}{\sin\alpha},\; c = \frac{b}{\cos\alpha} \;\Rightarrow\; c = \frac{h_c}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

$h_c = \dfrac{2S}{c} \;\Rightarrow\; h_c = \dfrac{2S\sin\alpha\cos\alpha}{h_c}$ или $h_c^{\,2} = S\sin 2\alpha$, $h_c = \sqrt{S\sin 2\alpha}$.

Окончателно $V = \dfrac{2\pi S\sqrt{S\sin 2\alpha}}{3}$, което е и отговорът на в)

В а) $\alpha = 30^\circ \;\Rightarrow\; 2\alpha = 60^\circ \;\Rightarrow\; V = \dfrac{2\pi S\sqrt{\dfrac{S\sqrt{3}}{2}}}{3} = \dfrac{2\pi S}{3}\sqrt[4]{\dfrac{3S^2}{4}}$.

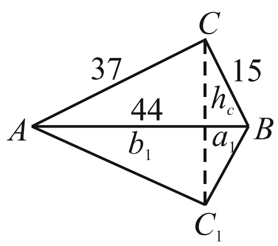
В б) $\alpha = 45^\circ \;\Rightarrow\; 2\alpha = 90^\circ \;\Rightarrow\; V = \dfrac{2\pi S\sqrt{S}}{3}$.

4. Нека в ΔABC $AB = c = 44$ cm и a_1 и b_1 са проекциите на другите две страни върху AB.

Триъгълникът е завъртян около AB и полученото тяло е съставено от два конуса с обща основа с радиус $h_c = CH$ и височини a_1 и b_1.

$\Rightarrow\; S = \pi h_c a + \pi h_c b = \pi h_c (a+b) = \pi h_c 52$ и

$$V = \frac{\pi h_c^{\,2} a_1}{3} + \frac{\pi h_c^{\,2} b_1}{3} = \frac{\pi h_c^{\,2} 44}{3}.$$



Остава да намерим h_c.

По хероновата формула намираме $S_{ABC} = \sqrt{48.33.11.4} = 264$.

$\Rightarrow\; h_c = \dfrac{2S_{ABC}}{c} = \dfrac{2.264}{44} = 12$.

$\Rightarrow\; S = \pi 12.52 = 624\pi$ cm^2 и

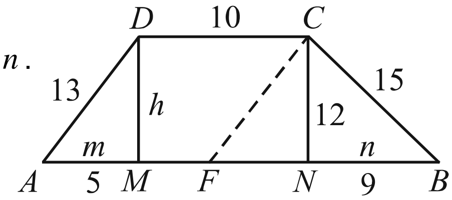
$V = \dfrac{\pi h_c^{\,2} 44}{3} = \dfrac{\pi 12^2.44}{3} = 2112\pi$ cm^3.

5. Предварително ще изчислим някои отсечки в трапеца.

Нека $CF \parallel AD$, $F \in AB$, $DM = CN = h$, $AM = m$, $BN = n$.

$S_{FBC} = \sqrt{21.8.7.6} = 84 = \dfrac{FB.h}{2} \;\Rightarrow\; h = \dfrac{2.84}{14} = 12$.

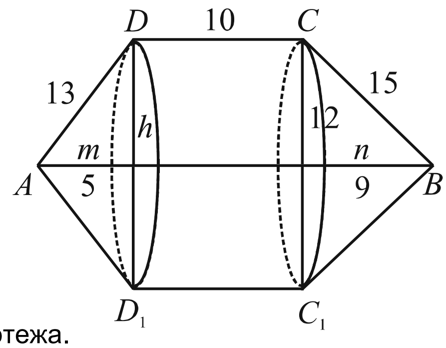
$\Rightarrow m = 5$, $n = 9$.



а) AB лежи на a

Нека C_1 и D_1 са симетричните точки на съответно на C и D относно AB.

Трапецът е завъртян около AB. Полученото тяло е съставено от три тела: конус K_1 с осно сечение DD_1A, цилиндър с осно сечение D_1C_1CD и конус K_2 с осно сечение CC_1B.



Елементите на телата вече са изчислени и са видими от чертежа.

$S_{цилиндър} = 2\pi.12.10 = 240\pi$,

$S_{K_1} = \pi.12.13 = 156\pi$,

$S_{K_2} = \pi.12.15 = 180\pi$

$\Rightarrow S = S_{цилиндър} + S_{K_1} + S_{K_2} = 576\pi$ cm^2

$V_{цилиндър} = \pi.12^2.10 = 1440\pi$

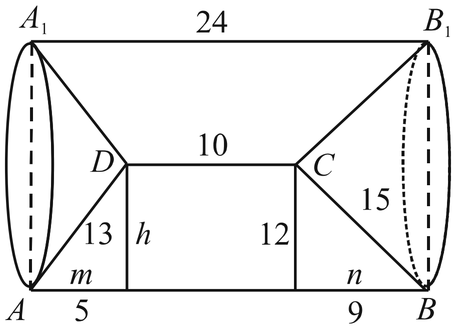
$V_{K_1} + V_{K_2} = \dfrac{\pi.12^2.(5+9)}{3} = 672\pi$

$\Rightarrow V = V_{цилиндър} + V_{K_1} + V_{K_2} = 2112\pi$ cm^3.

б) CD лежи на a

Нека A_1 и B_1 са симетричните точки на съответно на A и B относно CD.

Трапецът е завъртян около CD. Полученото тяло е съставено от цилиндър с осно сечение ABB_1A_1, от който са изрязани конусите K_1 с осно сечение AA_1D и конус K_2 с осно сечение BB_1C.



Елементите на телата вече са изчислени и са видими от чертежа.

Повърхнината на тялото е сбор от околната повърхнина на цилиндъра и околните повърхнини на двата конуса.

$S_{цилиндър} = 2\pi.12.24 = 576\pi$

$S_{K_1} = \pi.12.13 = 156\pi$,

$S_{K_2} = \pi.12.15 = 180\pi$

$\Rightarrow S = S_{цилиндър} + S_{K_1} + S_{K_2} = 912\pi$ cm^2

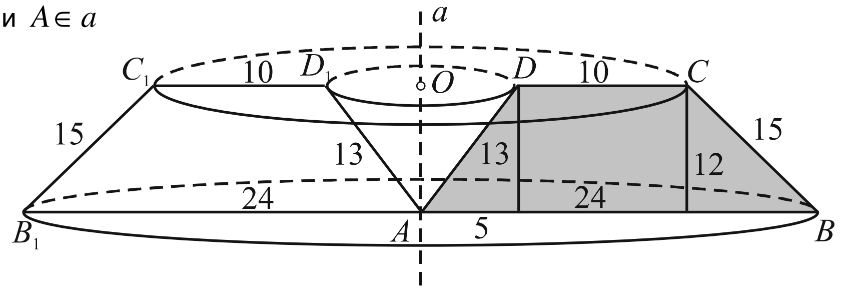
Обемът на тялото се получава, като от обема на цилиндъра се извадят обемите на двата конуса.

$V_{цилиндър} = \pi.12^2.24 = 3456\pi$

$V_{K_1} + V_{K_2} = \dfrac{\pi.12^2.(5+9)}{3} = 672\pi$

$\Rightarrow V = V_{цилиндър} - V_{K_1} - V_{K_2} = 2784\pi$ cm^3.

в) $a \perp AB$ и $A \in a$



Трапецът е завъртян около права a, минаваща през точка A и $a \perp AB$.

Симетричните точки на B, C и D относно правата a са съответно B_1, C_1 и D_1.

Полученото тяло се състои от пресечения конус K с осно сечение B_1BCC_1, от който е изрязан конус K_1 с осно сечение D_1DA.

Елементите на телата са изчислени и са видими от чертежа.

Пресеченият конус K е с радиуси 24 и 15, височина 12 и образуваща 15.

Конусът K_1 е с радиус 5, височина 12 и образуваща 13.

Повърхнината на тялото се състои от повърхнината на пресечения конус K, към която е прибавена околната повърхнина на конуса K_1 и е изваден кръг с радиус $m = 5$.

Повърхнината на K е: $S_K = \pi l(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi.15(24+15) + \pi.24^2 + \pi.15^2 = 1386\pi$.

Околната повърхнина на K_1 е: $S_{K_1} = \pi rl = \pi.5.13 = 65\pi$.

Лицето на кръга е $S_{кръг} = \pi.5^2 = 25\pi$.

$\Rightarrow S_{тяло} = S_{K_1} + S_K - S_{кръг} = (1386 + 65 - 25)\pi = 1426\pi$ cm^2.

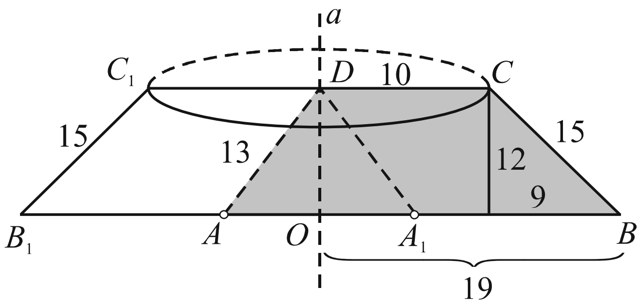
Обемът на тялото е разлика от обемите на пресечения конус K и конуса K_1.

$V_K = \dfrac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr) = \dfrac{\pi.12(24^2 + 15^2 + 24.15)}{3} = 4644\pi$

$V_{K_1} = \dfrac{\pi.5^2.12}{3} = 100\pi$

$\Rightarrow V_{тяло} = V_K - V_{K_1} = 4644\pi - 100\pi = 4544\pi$ cm^3.

г) $a \perp AB$ и $D \in a$



Трапецът е завъртян около права a, минаваща през точка D и $a \perp AB$.

Симетричните точки на B, C и A относно правата a са съответно B_1, C_1 и A_1.

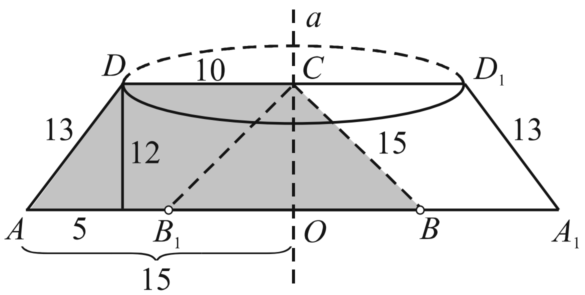
При въртенето точка A и симетричната ѝ A_1 остава вътре в тялото.

Полученото тяло е пресеченият конус K с осно сечение B_1BCC_1, радиуси 19 и 10, височина 12 и образуваща 15.

$$S_1 = \pi l(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi.15(19+10) + \pi.361 + \pi.100 = 896\pi \text{ cm}^2.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi.12(361+100+190)}{3} = 2604\pi \text{ cm}^3.$$

д) $a \perp AB$ и $C \in a$



Трапецът е завъртян около права a, минаваща през точка C и $a \perp AB$.

Симетричните точки на B, A и D относно правата a са съответно B_1, A_1 и D_1.

При въртенето точка B и симетричната ѝ B_1 остават вътре в тялото.

Полученото тяло е пресеченият конус K с осно сечение AA_1D_1D, радиуси 15 и 10, височина 12 и образуваща 13.

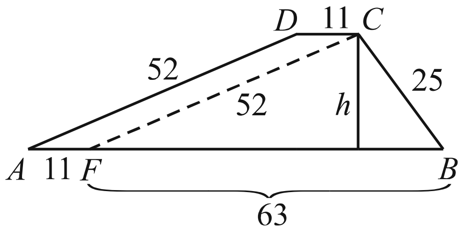
$$S_1 = \pi l(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2 = \pi.13(15+10) + \pi.225 + \pi.100 = 650\pi \text{ cm}^2.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi.12(225+100+150)}{3} = 1900\pi \text{ cm}^3.$$

6. Предварително ще изчислим някои отсечки в трапеца.

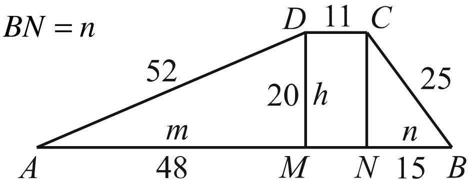
Нека $CF \parallel AD$, $F \in AB$, $FB = 63$

$S_{FBC} = \sqrt{70.18.7.45} = 7.2.5.9 = \frac{FB.h}{2} \Rightarrow h = 20$.



Нека $DM = CN = h$, $AM = m$, $BN = n$

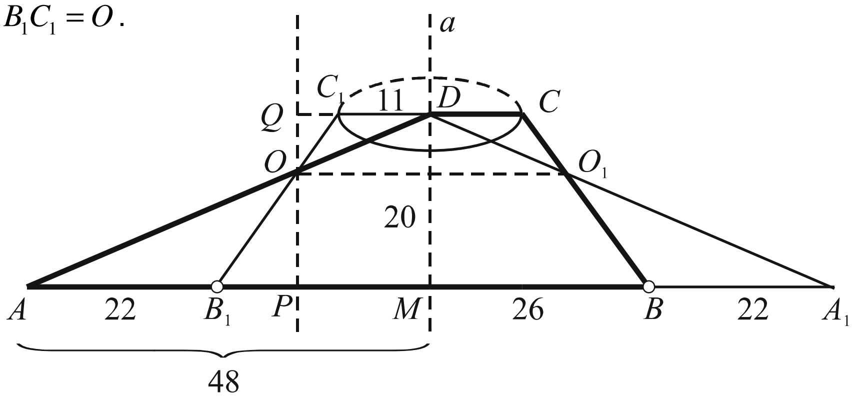
$\Rightarrow m = 48$, $n = 15$.



Трапецът е завъртян около права a, минаваща през точка D и $a \perp AB$.

Симетричните точки на B, A и C относно правата a са съответно B_1, A_1 и C_1.

Нека $AD \cap B_1C_1 = O$.



Тялото е съставено от два пресечени конуса – пресечен конус K_1 с осно сечение AA_1O_1O и пресечен конус K_2 с осно сечение OO_1CC_1.

Изчисляване елементите на пресечените конуси. Построяваме права през O, перпендикулярна на AB и означаваме пресечните ѝ точки с AB и CD съответно с P и Q.

Елементите на K_1 са: радиуси $R = AM = 48$ и $\rho = PM = DQ$, височина $h_1 = PO$ и образуваща $l_1 = AO$.

Елементите на K_2 са: радиуси $\rho = PM = DQ$ и $r = DC_1 = 11$, височина $h_2 = QO$ и образуваща $l_2 = C_1O$.

Последователно пресмятаме:

$BM = 11 + 15 = 26 = B_1M \Rightarrow AB_1 = 48 - 26 = 22$.

$\Delta AB_1O \sim \Delta DC_1O \Rightarrow \frac{AO}{DO} = \frac{B_1O}{C_1O} = \frac{AB_1}{DC_1} = \frac{22}{11} = 2$.

$\Rightarrow \frac{OP}{OQ} = 2$, като съответни височини в подобните триъгълници и $OP + OQ = 20 \Rightarrow$ $h_1 = OP = \frac{40}{3}$ и $h_2 = OQ = \frac{20}{3}$.

Имаме $\frac{AO}{DO} = 2$ и $AO + DO = AD = 52 \Rightarrow l_1 = AO = \frac{2}{3}.52 = \frac{104}{3}$.

Имаме $\dfrac{B_1O}{C_1O}=2$ и $B_1O+C_1O=B_1C_1=BC=25 \;\Rightarrow\; l_2=C_1O=\dfrac{25}{3}$.

$\Delta APO\sim\Delta DQO$ с коефициент $\dfrac{PO}{QO}=2 \;\Rightarrow\; \dfrac{AP}{DQ}=2$ и $AP+DQ=AM=48 \;\Rightarrow\; \rho=DQ=16$.

Изчисляване повърхнината и обема на тялото.

Повърхнината на тялото се състои от повърхнините на K_1 и K_2 без общата им основа.

$$S=S_{K_1}+S_{K_2}-2.\pi\rho^2=\pi l_1(R+\rho)+\pi R^2+\cancel{\pi\rho^2}+\pi l_2(\rho+r)+\cancel{\pi\rho^2}+\pi r^2-\cancel{2\pi\rho^2}=$$

$$=\pi\left(\frac{104}{3}.64+48^2+\frac{25}{3}.27+11^2\right)=\pi\left(\frac{6656}{3}+2650\right)=\frac{14606\pi}{3}$$

$$V=V_1+V_2=\frac{1}{3}\pi h(R^2+\rho^2+R\rho)+\frac{1}{3}\pi h(\rho^2+r^2+\rho r)=$$

$$=\frac{\pi}{3}.\frac{40}{3}\left(48^2+16^2+48.16\right)+\frac{\pi}{3}.\frac{20}{3}\left(16^2+11^2+16.11\right)=\frac{\pi 20.7209}{9}=20\pi.801=16020\pi.$$

7. Нека B_1 е симетричната точка на B относно AC.

Нека C_1 е симетричната точка на C относно AB.

Намираме височините h_b и h_c.

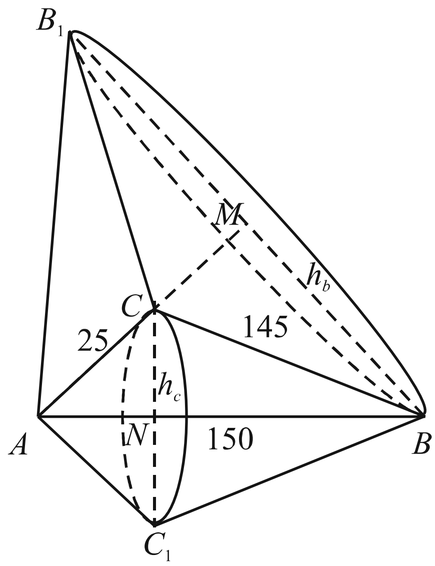
$S_{ABC}=\sqrt{160.10.135.15}=1800$.

$\Rightarrow\; h_b=\dfrac{2.1800}{25}=144$ и $h_c=\dfrac{2.1800}{150}=24$.

$\Rightarrow\; V_1=\dfrac{\pi h_b{}^2 AC}{3}=\dfrac{\pi\, 144^2.25}{3}$

$V_2=\dfrac{\pi h_c{}^2 AB}{3}=\dfrac{\pi\, 24^2.150}{3}$

$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\pi\, 144^2.25}{\pi\, 24^2.150}=6$.



8. Нека B_1 е симетричната точка на B относно AC.

Нека C_1 е симетричната точка на C относно AB.

Намираме височините h_b и h_c.

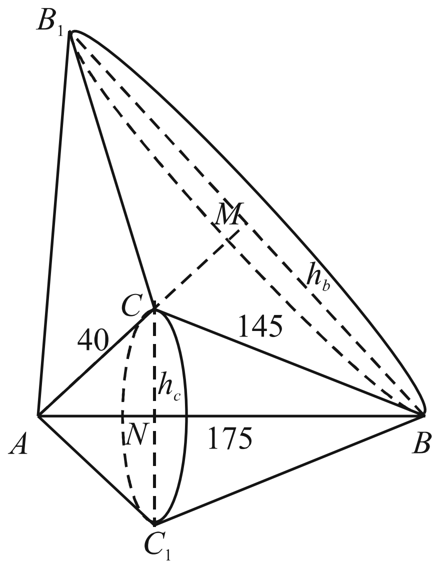
$S_{ABC}=\sqrt{180.5.35.140}=2100$.

$\Rightarrow\; h_b=\dfrac{2.2100}{40}=105$ и $h_c=\dfrac{2.2100}{175}=24$.

$\Rightarrow\; V_1=\dfrac{\pi h_b{}^2 AC}{3}=\dfrac{\pi\, 105^2.40}{3}$

$V_2=\dfrac{\pi h_c{}^2 AB}{3}=\dfrac{\pi\, 24^2.175}{3}$

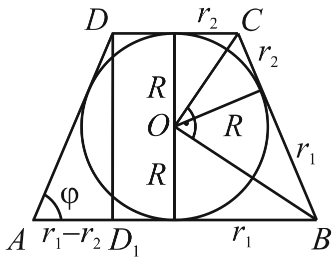
$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\pi\, 105^2.40}{\pi\, 24^2.175}=\dfrac{35}{8}$.



Комбинации от ротационни тела

9. Нека $r_1 > r_2$ са радиусите на пресечения конус, R е радиусът на кълбото и O е центърът му.

Осното сечение на пресечения конус е равнобедрен трапец $ABCD$ и вписаната в него окръжност е голяма окръжност на кълбото.



$\Rightarrow\ h = 2R$

От правоъгълния ΔBCO имаме $R^2 = r_1 r_2$.

$$V_{пр.конус} = \frac{1}{3}\pi\ 2R(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

$$V_{кълбо} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

По условие обемът на кълбото е равен на половината от обема на конуса.

$$\Rightarrow\ \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}\pi\ 2R(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)\ \Leftrightarrow\ 4R^2 = r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2.$$

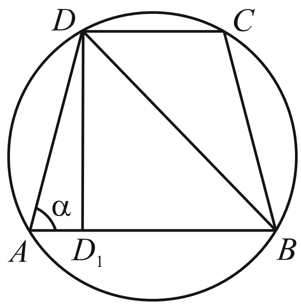
Преобразуваме последното равенство:

$$4R^2 = (r_1 - r_2)^2 + 3r_1 r_2,\ \ 4R^2 = (r_1 - r_2)^2 + 3R^2,\ \ R^2 = (r_1 - r_2)^2$$

$\Rightarrow\ R = r_1 - r_2$.

От ΔAD_1D намираме $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{DD_1}{AD_1} = \dfrac{2R}{r_1 - r_2} = \dfrac{2R}{R} = 2$.

10. Осното сечение на пресечения конус е равнобедрен трапец, вписан в голяма окръжност на сферата.



По условие $AB = 2R$ и $CD = 2r$.

$\Rightarrow\ AD_1 = R - r$ и $AD = \dfrac{AD_1}{\cos\alpha} = \dfrac{R - r}{\cos\alpha}$.

Прилагаме косинусовата теорема за ΔABD:

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD.AB\cos\alpha$$

$$BD^2 = \frac{(R-r)^2}{\cos^2\alpha} + 4R^2 - 2.\frac{R-r}{\cos\alpha}.2R.\cos\alpha = \frac{(R-r)^2}{\cos^2\alpha} + 4R^2 - 4R^2 + 4Rr.$$

$$\Rightarrow\ BD = \frac{1}{\cos\alpha}\sqrt{(R-r)^2 + 4Rr\cos^2\alpha}.$$

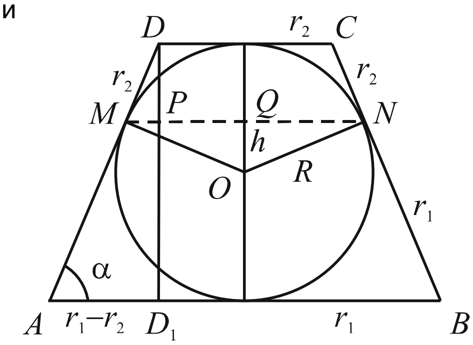
Нека радиусът на сферата е ρ.

Прилагаме синусовата теорема за ΔABD и намираме

$\dfrac{BD}{\sin\alpha} = 2\rho$ или $\rho = \dfrac{BD}{2\sin\alpha}$.

Окончателно $\rho = \dfrac{1}{\cos\alpha}\sqrt{(R-r)^2 + 4Rr\cos^2\alpha}.\dfrac{1}{2\sin\alpha} = \dfrac{1}{\sin 2\alpha}\sqrt{(R-r)^2 + 4Rr\cos^2\alpha}$.

11. При означенията на чертежа, в задачата се търси обемът и лицето на повърхнината на конуса с осно сечение MON, с височина $h = OQ$, радиус $r = MQ$ и образуваща $OM = R$.



От ΔAD_1D имаме:

$$2R = l\sin\alpha$$

$$r_1 - r_2 = l\cos\alpha$$

$$r_1 + r_2 = l$$

От тези равенства определяме $R = \dfrac{l\sin\alpha}{2}$ и $r_2 = \dfrac{l\,(1-\cos\alpha)}{2}$. (1)

В ΔMPD $DP = R - h$ и $DM = r_2$.

$\Rightarrow R - h = r_2\sin\alpha$.

$$\Rightarrow h = R - r_2\sin\alpha = \frac{l\sin\alpha}{2} - \frac{l(1-\cos\alpha).\sin\alpha}{2} = \frac{l\sin\alpha\cos\alpha}{2}.$$

От питагоровата теорема за ΔMOQ имаме:

$$MQ^2 = r^2 = R^2 - h^2 = \frac{l^2\sin^2\alpha}{4} - \frac{l^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{4} = \frac{l^2\sin^2\alpha}{4}\left(1-\cos^2\alpha\right) = \frac{l^2\sin^4\alpha}{4}$$

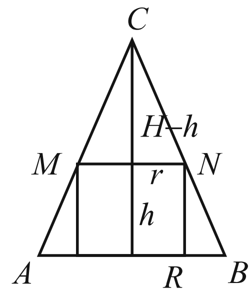
$$\Rightarrow r = \frac{l\sin^2\alpha}{2}.$$

Търсените обем и лице са:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\frac{l^2\sin^4\alpha}{4}.\frac{l\sin 2\alpha}{4} = \frac{1}{48}\pi l^3\sin^4\alpha\sin 2\alpha.$$

$$S_1 = \pi.\frac{l\sin^2\alpha}{2}\left(\frac{l\sin^2\alpha}{2} + \frac{l\sin\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi l^2\sin^3\alpha\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{4}\right).$$

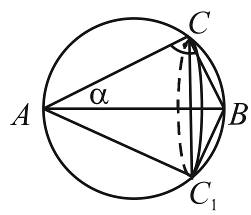
12. На чертежа е показано осно сечение на конуса и вписаният цилиндър.



$\Delta MNC \sim \Delta ABC \;\Rightarrow\; \dfrac{r}{R} = \dfrac{H-h}{H}$ или $\dfrac{r}{R} = 1 - \dfrac{h}{H}$

$\Rightarrow \dfrac{r}{R} + \dfrac{h}{H} = 1$,

13. По условие $c = AB = 2R$, $\sin\alpha = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{4}{5}$.



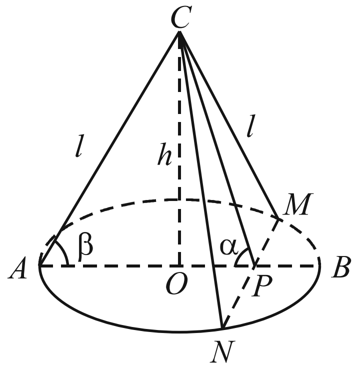
Тъй като $a = c\sin\alpha$, $b = c\cos\alpha$, то $h_c = \dfrac{ab}{c} = \dfrac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{c} = \dfrac{12c}{25}$.

Тялото е образувано от два конуса с обща основа с радиус h_c.

$$V_{тяло} = \frac{\pi {h_c}^2 c}{3} = \frac{\pi\, 12^2 c^3}{3.25^2} = \frac{\pi\, 12^2.8.R^3}{3.25^2}.$$

$$V_{кълбо} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{тяло}}{V_{кълбо}} = \frac{\pi\, 12^2.8.R^3.3}{3.25^2.4\,\pi\, R^3} = \frac{288}{625}.$$



14. а) Нека O е центърът на основата и $CO = h$.

Нека равностранният триъгълник MNC е сечението на равнината с конуса.

Нека ΔABC е осно сечение на конуса, такова че $AB \perp MN$ и $AB \cap MN = P \Rightarrow P$ е средата на MN и $CP \perp MN$

$\Rightarrow \angle OPC = \alpha$.

От ΔOPC намираме: $OP = h\operatorname{cotg}\alpha$ и $CP = \dfrac{h}{\sin a}$.

По условие ΔMNC е равностранен, CP е височина в него $\Rightarrow$

$$MN = CM = l = \frac{2CP}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}h}{3\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad NP = MP = \frac{\sqrt{3}h}{3\sin\alpha}.$$

От ΔOPM имаме $r = OM = \sqrt{OP^2 + MP^2} = \sqrt{h^2\operatorname{cotg}^2\alpha + \left(\dfrac{\sqrt{3}h}{3\sin\alpha}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}h}{3\sin\alpha}\sqrt{3\cos^2\alpha + 1}$.

$$\Rightarrow S_1 = \pi r(r+l) = \pi\left(r^2 + rl\right) = \pi\left(\frac{h^2}{3\sin^2\alpha}(3\cos^2\alpha + 1) + \frac{2h^2}{3\sin^2\alpha}\sqrt{3\cos^2\alpha + 1}\right) =$$

$$= \frac{\pi h^2}{3\sin^2\alpha}\left(2\sqrt{3\cos^2\alpha + 1} + 3\cos^2\alpha + 1\right).$$

б) Нека R е радиусът на описаното кълбо $\Rightarrow$ R е радиусът на описаната около ΔABC окръжност.

В ΔABC: $AC = BC = l$ и $AB = 2r$.

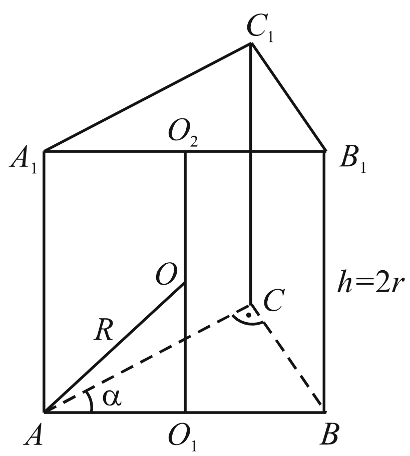
За да намерим R, ще използваме синусовата теорема. За целта означаваме $\angle BAC = \beta$ и пресмятаме $\sin\beta = \dfrac{h}{l} = \dfrac{3h\sin\alpha}{2\sqrt{3}\ h} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$.

Прилагаме синусовата теорема за ΔABC: $\dfrac{l}{\sin\beta} = 2R$.

$$\Rightarrow R = \frac{l}{2\sin\beta} = \frac{2\sqrt{3}h.2}{3\sin\alpha.2\sqrt{3}\sin\alpha} = \frac{2h}{3\sin^2\alpha}.$$

За обема на кълбото намираме:

$$V_{\text{кълбо}} = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi 8h^3}{3.27.\sin^6\alpha} = \frac{32\pi h^3}{81\sin^6\alpha}.$$



15. Нека $ABCA_1B_1C_1$ е дадената призма и $\angle ACB = 90°$, $AB = c$

Тогава $BC = c\sin\alpha$, $AC = c\cos\alpha$.

$$\Rightarrow B = \frac{ab}{2} = \frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{2} = \frac{c^2\sin 2\alpha}{4}$$

$$\Rightarrow c = 2\sqrt{\frac{B}{\sin 2\alpha}}.$$

Нека r е радиусът на вписаната в основата окръжност.

Основата е правоъгълен триъгълник

$$\Rightarrow r = p - c = \frac{c\sin\alpha + c\cos\alpha + c}{2} - c = \frac{c\sin\alpha + c\cos\alpha - c}{2} =$$

$= \sqrt{\dfrac{B}{\sin 2\alpha}}\left(\sin\alpha+\cos\alpha-1\right)$.

Имаме $h=2r$, $p=r+c$.

$\Rightarrow\ S_1=2B+2ph=2B+2(c+r).2r=$

$= 2B+4\sqrt{\dfrac{B}{\sin 2\alpha}}\left(2+\sin\alpha+\cos\alpha-1\right).\sqrt{\dfrac{B}{\sin 2\alpha}}\left(\sin\alpha+\cos\alpha-1\right)=$

$= 2B+4\dfrac{B}{\sin 2\alpha}\left(\sin\alpha+\cos\alpha+1\right)\left(\sin\alpha+\cos\alpha-1\right)=$

$= 2B+4\dfrac{B}{\sin 2\alpha}\left(1+\sin 2\alpha-1\right)=6B$.

За обема получаваме:

$V=Bh=2B\sqrt{\dfrac{B}{\sin 2\alpha}}\left(\sin\alpha+\cos\alpha-1\right)$.

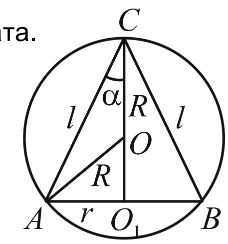
б) Призмата е права триъгълна, следователно около нея може да се опише сфера и центърът ѝ O е средата на отсечката O_1O_2, свързваща центровете на описаните окръжности около основите.

Тъй като ΔABC е правоъгълен, то O_1 и O_2 са средите съответно на AB и A_1B_1.

От ΔAO_1O намираме радиуса R на сферата:

$R^2=\dfrac{c^2}{4}+r^2=\dfrac{B}{\sin 2\alpha}+\dfrac{B}{\sin 2\alpha}\left(\sin\alpha+\cos\alpha-1\right)^2=\dfrac{B}{\sin 2\alpha}\left(3+\sin 2\alpha-2(\sin\alpha+\cos\alpha)\right)$.

$\Rightarrow\ S_{сфера}=4\pi R^2=\dfrac{4\pi B}{\sin 2\alpha}\left(3+\sin 2\alpha-2(\sin\alpha+\cos\alpha)\right)$.



16. Осното сечение на конуса е триъгълник, вписан в голяма окръжност на сферата.

Нека $AC=BC=l$, $AO_1=BO_1=r$, $CO_1=h$ и $OA=OC=R$.

От ΔAOC: $l=2R\cos\alpha$.

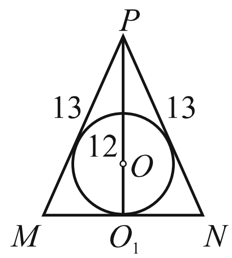
От ΔAO_1C: $h=l\cos\alpha=2R\cos^2\alpha$

и $r=l\sin\alpha=2R\sin\alpha\cos\alpha$.

$\Rightarrow\ S_1=\pi r(r+l)=\pi R\sin 2\alpha\left(2R\sin\alpha\cos\alpha+2R\cos\alpha\right)=$

$= 2\pi R^2\sin 2\alpha\cos\alpha(\sin\alpha+1)$.

и $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h=\dfrac{2}{3}\pi R^3\sin^2 2\alpha\ \cos^2\alpha$.



17. Нека ΔMNP е осно сечение на конуса и O_1 е средата на MN.

Центърът O на вписаното кълбо съвпада с центъра на вписаната в ΔMNP окръжност.

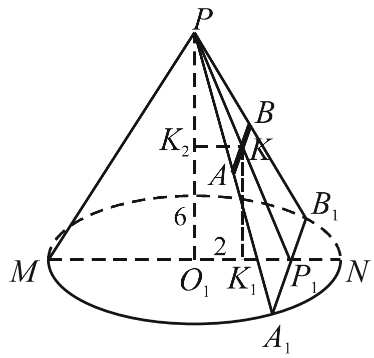
От ΔMO_1P имаме $MO_1=5\ \Rightarrow\ MN=10$.

$\Rightarrow\ S_{MNP}=\dfrac{10.12}{2}=60$ и $p=\dfrac{36}{2}=18$.

Като използваме, че $S=pr$, намираме $r=\dfrac{S}{p}=\dfrac{60}{18}=\dfrac{10}{3}$.

$\Rightarrow\ V_{кълбо}=\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{4}{3}\pi\dfrac{1000}{27}=\dfrac{4000\pi}{81}$ cm^3.

б) Нека K е средата на AB, $PK \cap MN = P_1$ и правата през P_1, успоредна на AB, пресича конуса в точки A_1 и B_1, т.е. $A_1B_1 \parallel AB$.



В ΔO_1P_1P построяваме $KK_1 \perp MN$ и $KK_2 \perp O_1P$.

$\Rightarrow KK_1 \parallel PO_1 \Rightarrow KK_1 \perp$ основата на конуса.

$\Rightarrow KK_1 = 6$, $KK_2 = 2$.

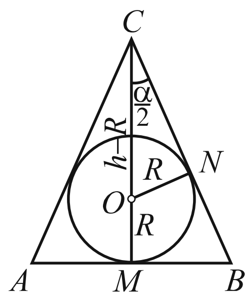
Тъй като $PO_1 = 12 \Rightarrow K_2$ е средата на PO_1.

Тогава KK_2 е средна отсечка в $\Delta O_1P_1P \Rightarrow O_1P_1 = 4$ и K е средата на PP_1.

$\Rightarrow AB$ е средна отсечка в ΔA_1B_1P.

От $\Delta O_1A_1P_1$ намираме $A_1P_1 = 3 \Rightarrow AB = A_1P_1 = 3$ cm.

18. Нека ΔABC е осно сечение на конуса.



Вписаната окръжност в ΔABC е голяма окръжност на вписаната сфера.

Според означенията на чертежа имаме:

от ΔONC $R = (h-R)\sin\frac{\alpha}{2}$

$$\Rightarrow R\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right) = h\sin\frac{\alpha}{2}$$

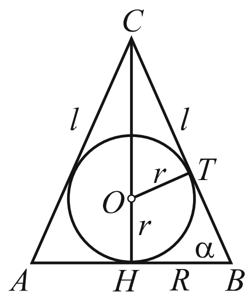
$$\Rightarrow R = \frac{h\sin\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Преобразуваме израза за R:

$$R = \frac{h\sin\frac{\alpha}{2}}{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}.\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = h\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}} = h\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.\frac{\cos^2\frac{\alpha}{4}-\sin^2\frac{\alpha}{4}}{\left(\cos\frac{a}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}\right)^2} = h\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.\frac{\cos\frac{\alpha}{4}-\sin\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{a}{4}+\sin\frac{\alpha}{4}} =$$

$$= h\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.\frac{\sqrt{2}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)} = h\ \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\ \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right).$$

19. Нека ΔABC е осно сечение на конуса.



Вписаната окръжност в ΔABC е голяма окръжност на вписаната сфера.

Нека R е радиусът на конуса и r е радиусът на сферата.

Според означенията на чертежа, имаме: $AH = BH = R$, $OH = OT = r$, $BC = AC = l$, $CH = h$.

$$V_{конус} = \frac{1}{3}\pi R^2 h\ ,\quad V_{кълбо} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

По условие $V_{кълбо} = \frac{4}{9}V_{конус} \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{9}.\frac{1}{3}\pi R^2 h$ или

$$9r^3 = R^2 h \quad (1).$$

От ΔHBC: $h = l\sin\alpha$ и $R = l\cos\alpha$.

От ΔOTC: $r = (h-r)\cos\alpha$, $r(1+\cos\alpha) = h\cos\alpha \ \Rightarrow\ r = \dfrac{l\sin\alpha\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$.

Заместваме в (1):

$$\frac{9l^3\sin^3\alpha\cos^3\alpha}{(1+\cos\alpha)^3} = l^2\cos^2\alpha.l\sin\alpha \ \Leftrightarrow\ 9\sin^2\alpha\cos\alpha = (1+\cos\alpha)^3,$$

Получаваме уравнението:

$9(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha = (1+\cos\alpha)^3$, $\alpha \in (0°, 90°)$.

Полагаме $\cos\alpha = x$.

$9(1-x^2)x - (1+x)^3 = 0$, $(1+x)(9x - 9x^2 - x^2 - 2x - 1) = 0$

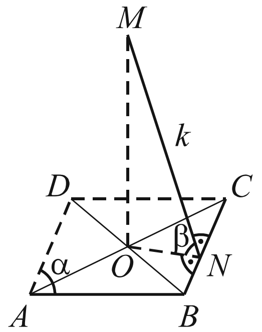
$(x+1)(-10x^2+7x-1) = 0$ или $(x+1)(10x^2-7x+1) = 0 \ \Leftrightarrow\ 10(x+1)(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{5}) = 0$.

$\Rightarrow \cos\alpha = -1$, $\alpha \notin (0°, 90°)$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = 60°$

$\cos\alpha = \dfrac{1}{5}$, $\alpha \in (0°, 90°)$.

Комбинации от многостени и сфери



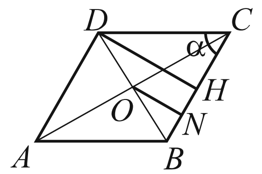
20. Нека $ABCDM$ е пирамида с основа ромб $ABCD$ с остър ъгъл $\angle BAD = \alpha$.

Всички околни стени образуват с равнината на основата равни двустенни ъгли $\Rightarrow$ върхът M се проектира в точка O, която е център на вписаната окръжност в ромба и е пресечна точка на диагоналите му.

Нека $MN \perp BC$, $N \in BC \ \Rightarrow\ MN = k$.

Проекцията на MN е ON и като приложим теоремата за трите перпендикуляра, получаваме, че $ON \perp BC \ \Rightarrow\ \angle ONM = \beta$.

Нека DH е височина в ромба $DH \perp BC$, $H \in BC \ \Rightarrow\ ON$ е средна отсечка в ΔDBH.



От ΔONM: $ON = k\cos\beta \ \Rightarrow\ DH = 2ON = 2k\cos\beta$.

От ΔDHC: $BC = DC = \dfrac{DH}{\sin\alpha} = \dfrac{2k\cos\beta}{\sin\alpha}$.

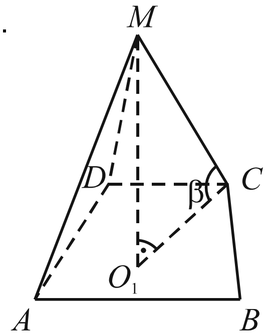
$$\Rightarrow\ S_1 = DH.BC + 4.\frac{BC.k}{2} = \frac{4k^2\cos^2\beta}{\sin\alpha} + \frac{4k^2\cos\beta}{\sin\alpha} = \frac{4k^2\cos\beta}{\sin\alpha}(\cos\beta+1) = \frac{8k^2\cos\beta\ \cos^2\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha}.$$

Всички околни стени образуват с равнината на основата равни двустенни ъгли $\Rightarrow$ в пирамидата се вписва кълбо и ако R е радиусът му, то $R = \dfrac{3\,V}{S_1}$.

От ΔMON: $MO = k\sin\beta \ \Rightarrow\ V = \dfrac{1}{3}\dfrac{4k^3\cos^2\beta\sin\beta}{\sin\alpha}$

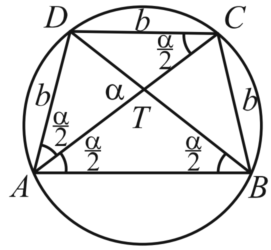
$$\Rightarrow\ R = \frac{4k^3\cos^2\beta\sin\beta}{\sin\alpha}.\frac{\sin\alpha}{8k^2\cos\beta\cos^2\frac{\beta}{2}} = \frac{k\cos\beta\sin\beta}{2\cos^2\frac{\beta}{2}} = \frac{k\cos\beta\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}} = k\cos\beta\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}.$$

21. а) Нека $ABCDM$ е пирамида с основа трапец $ABCD$, $AB \parallel CD$, $AB > CD$.



Всичките околни ръбове са еднакво наклонени към основата $\Rightarrow M$ се проектира в центъра O_1 на описаната окръжност около трапеца.

$\Rightarrow \angle O_1CM = \beta$ и $O_1C = R_{трапец}$.



По условие в трапеца $ABCD$ $AD = DC = BC = b$ и $\angle BAD = \alpha$.

$\Rightarrow$ диагоналите са ъглополовящи на острите ъгли на трапеца и ъгълът между диагоналите е α, по-точно $\angle ATD = \alpha$, където T е пресечната точка на диагоналите.

От ΔACD: $\frac{AC}{2} = b\cos\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad AC = 2b\cos\frac{\alpha}{2} = BD$.

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{AC.BD\sin\alpha}{2} = 2b^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha$.

Прилагаме синусовата теорема за ΔABD:

$\Rightarrow \frac{BD}{\sin\alpha} = 2R_{трапец} \quad \Rightarrow \quad R_{трапец} = \frac{b\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$.

От ΔMO_1C: $MO_1 = R_{трапец}\,\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}.\mathrm{tg}\,\beta$.

За обема на пирамидата получаваме:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.MO_1 = \frac{1}{3}2b^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha.\frac{b\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}.\mathrm{tg}\,\beta = \frac{2}{3}b^3\cos^3\frac{a}{2}\mathrm{tg}\,\beta.$$

б) Всичките околни ръбове са еднакво наклонени към основата

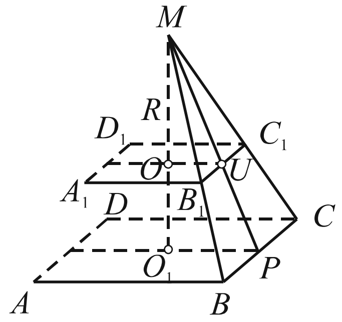
$\Rightarrow$ всички околни ръбове са равни

$\Rightarrow$ около пирамидата се описва сфера с радиус $R = \frac{l^2}{2h}$, където l е околният ръб, а h е височината на пирамидата.

От ΔMO_1C имаме:

$h = MO_1 = R_{трапец}\,\mathrm{tg}\,\beta$ и $l = MC = \frac{R_{трапец}}{\cos\beta}$.

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}.\frac{R^2_{трапец}}{\cos^2\beta}.\frac{1}{R_{трапец}\,\mathrm{tg}\,\beta} = \frac{R_{трапец}}{2\cos\beta\sin\beta} = \frac{R_{трапец}}{\sin 2\beta} = \frac{b\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha\sin 2\beta} = \frac{b}{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin 2\beta}.$$



22. Нека $ABCDM$ е правилна четириъгълна пирамида с връх M.

Проекцията на M в основата е O_1.

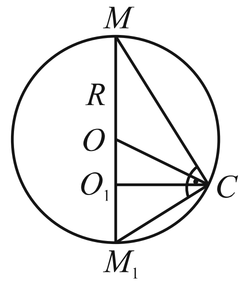
Нека O е центърът на описаната сфера и $A_1B_1C_1D_1$ е успоредно сечение през O.

$\Rightarrow OM = R$.

Да означим $AB = a$, $A_1B_1 = b$, $OO_1 = h$.

Диагоналът $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow CO_1 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

По условие $MO_1 = a \Rightarrow R + h = a$. (1)



Нека MO пресича сферата в точка $M_1 \neq M \Rightarrow MM_1 = 2R$,

ΔMM_1C е правоъгълен и от метричните зависимости намираме:

$CO_1^{\,2} = MO_1.O_1M_1$

$\Rightarrow \left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a.O_1M_1 \Rightarrow O_1M_1 = \dfrac{a}{2}$.

От друга страна $O_1M_1 = OM_1 - OO_1 = R - h \Rightarrow R - h = \dfrac{a}{2}$. (2)

Сега от (1) и (2) получаваме $2R = \dfrac{3a}{2}$ или $a = \dfrac{4R}{3}$ и $h = \dfrac{R}{3}$.

Нека P е средата на BC и $MP \cap B_1C_1 = U$.

Имаме $O_1P = \dfrac{1}{2}AB$ и от подобието на ΔMO_1P и ΔMOU намираме, че $OU = \dfrac{1}{2}OM = \dfrac{1}{2}R$.

Тъй като $OU = \dfrac{1}{2}A_1B_1 \Rightarrow b = A_1B_1 = R$.

И така, елементите на пресечената пирамида са $a = \dfrac{4R}{3}$, $b = R$, $h = \dfrac{R}{3}$.

$$\Rightarrow V = \frac{h}{3}\left(B + B_1 + \sqrt{BB_1}\right) = \frac{R}{9}\left(\frac{16R^2}{9} + R^2 + \sqrt{\frac{16R^2.R^2}{9}}\right) = \frac{R}{9}\left(\frac{16R^2}{9} + R^2 + \frac{4R^2}{3}\right) = \frac{37R^3}{81}.$$

За да намерим околната повърхнина на пресечената пирамида, трябва да намерим апотемата $k = UP$.

От ΔOUM намираме $MU = \sqrt{R^2 + \dfrac{R^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}\,R}{2}$.

От ΔO_1PM намираме $MP = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{4R}{3}.\dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{2\sqrt{5}R}{3}$.

$$\Rightarrow k = UP = MP - MU = \frac{2\sqrt{5}R}{3} - \frac{\sqrt{5}R}{2} = \frac{\sqrt{5}R}{6}$$

$$\Rightarrow S = 4.\frac{a+b}{2}.k = 4.\frac{7R}{6}.\frac{\sqrt{5}R}{6} = \frac{7\sqrt{5}R^2}{9}.$$