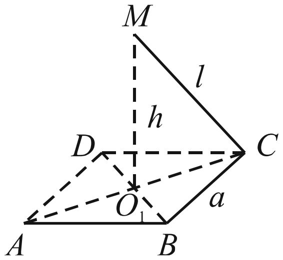
2.4. Комбинации от многостени и сфери

1) Описана сфера

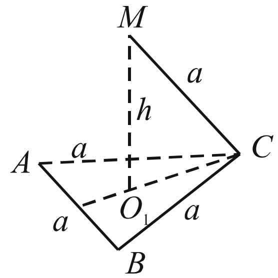
2. Търси се радиусът на **описаната сфера около пирамида.**



$$l^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 16 + \frac{16}{2} = 24$$

$$R = \frac{l^2}{2h} = \frac{24}{8} = 3.$$

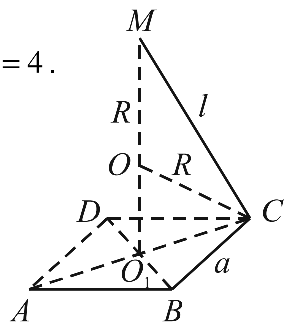
3. Търси се радиусът на **описаната сфера около пирамида.**



$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{3} = \frac{2a^2}{3},\ h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$$

$$R = \frac{l^2}{2h} = \frac{a^2}{2h} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}a} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

4. Дадена е **описана сфера около пирамида** с център O.



Ако $MO = R = 4$, то $OO_1 = 5$

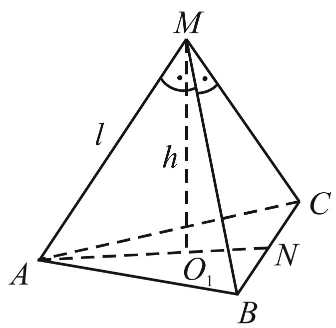
$\Rightarrow$ в ΔOO_1C катетът е по-малък от хипотенузата $\Rightarrow$ $MO = R = 5$, $OO_1 = 4$.

От ΔOO_1C: $O_1C^2 = OC^2 - OO_1^2$, $\quad \frac{a^2}{2} = 25 - 16$

$\Rightarrow$ $a^2 = 18$;

$\Rightarrow V = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}18.9 = 54$ cm^3.

5. Търси се радиусът на **описаната сфера около пирамида.**

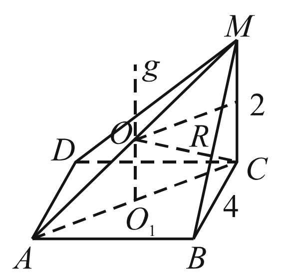


От ΔABM: $a^2 = 2l^2$, $a = l\sqrt{2}$.

От ΔABC: $AO_1 = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{6}}{3}$.

От ΔAO_1M: $l^2 - \frac{l^2 6}{9} = h^2$, $l^2 = 3h^2$. $R = \frac{l^2}{2h} = \frac{3h^2}{2h} = \frac{3h}{2}$.

7. Търси се радиусът на **описаната сфера около пирамида.**



Както в задача 6 установяваме положението на точка O.

$OO_1 = 1$

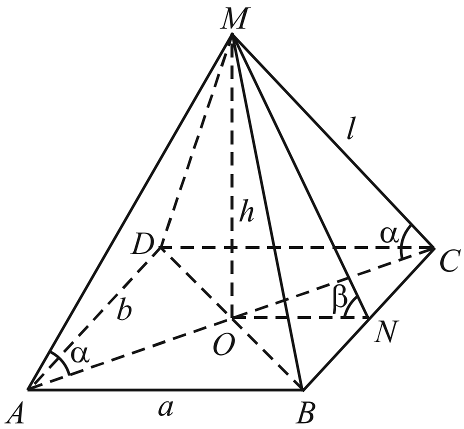
$O_1C = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$,

$R^2 = 1 + 8 = 9$, $R = 3$.

8. Задача за **описана сфера около пирамида.**

Нека $AB = CD = a$ и $AD = BC = b$.

Точките A, C и M лежат на голяма окръжност $\Rightarrow$ ΔACM е вписан в окръжност с радиус R.



От синусовата теорема имаме $l = MC = 2R\sin\alpha$.

От ΔMOC: $h = l\sin\alpha = 2R\sin^2\alpha$.

От ΔONM: $\frac{a}{2} = ON = h\operatorname{cotg}\beta$.

Следователно $a = 2h\operatorname{cotg}\beta = 4R\sin^2\alpha\operatorname{cotg}\beta$.

Остава да намерим b.

$MN = \frac{h}{\sin\beta} = \frac{2R\sin^2\alpha}{\sin\beta}$.

От ΔMNC: $NC^2 = MC^2 - MN^2$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = l^2 - MN^2 = 4R^2\sin^2\alpha - \frac{4R^2\sin^4\alpha}{\sin^2\beta} .$$

$$b^2 = 16R^2\sin^2\alpha\left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}\right),\ b = \frac{4R\sin\alpha\sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}}{\sin\beta} .$$

Следователно $V = \frac{1}{3}abh = \frac{1}{3}4R\sin^2\alpha\operatorname{cotg}\beta\frac{4R\sin\alpha\sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}}{\sin\beta}2R\sin^2\alpha =$

$$= \frac{32R^3\sin^5\alpha\operatorname{cotg}\beta\sqrt{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}}{3\sin\beta} .$$

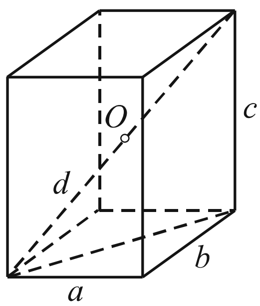
Ще преобразуваме $\sin^2\beta - \sin^2\alpha$ в произведение:

$$\sin^2\beta - \sin^2\alpha = (\sin\beta - \sin\alpha)(\sin\beta + \sin\alpha) = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos\frac{\beta-\alpha}{2} =$$

$\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)$.

$$V = \frac{32R^3\sin^5\alpha\operatorname{cotg}\beta\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}}{3\sin\beta} .$$

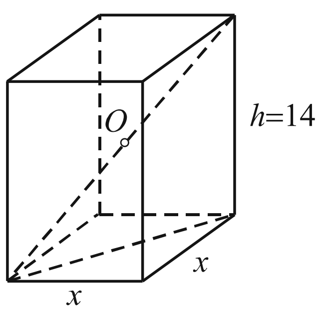
<u>Призма и описана сфера (вписана призма)</u>



11. Търси се радиусът на **описаната сфера около призма.**

$a = 4$, $b = 6$, $c = 12$.

$$R = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2} = \frac{\sqrt{196}}{2} = 7.$$



12. Даден е радиусът на **описаната сфера около призма.**

$R = 9$,

$x^2 + x^2 + 14^2 = 4R^2$,

$x = 8$.

13. Търси се радиусът на **описаната сфера около призма.**

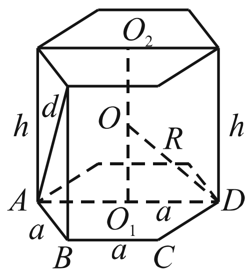
$h=8$, в околна стена $d=13$, $R=?$

$d^2=h^2+a^2$, $169=64+a^2$,

$a^2=105$.

Центърът O на описаната сфера е средата на височината O_1O_2.

Основата е правилен шестоъгълник $\Rightarrow$ радиусът на описаната окръжност около основата е равен на основния ръб a $\Rightarrow$ $O_1D=a$.



От ΔOO_1D: $R^2=a^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2$.

$4R^2=4a^2+h^2$, $4R^2=420+64$, $R=11$.

14. Даден е радиусът на **описаната сфера около призма.**

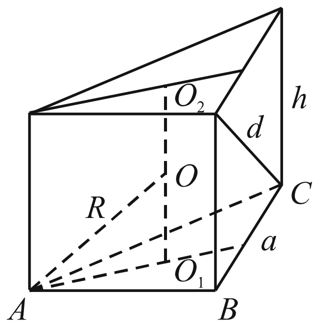
$R=14$, в околна стена $d=26$, $a=?$

$h^2=d^2-a^2=676-a^2$,

$R^2=AO_1^{\,2}+OO_1^{\,2}$,

$$14^2=\left(\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{676-a^2}}{2}\right)^2,$$

$a=18$.

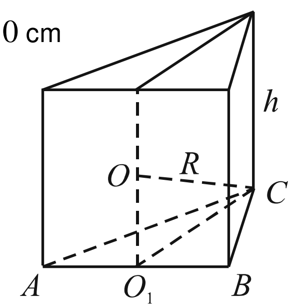


15. Търси се радиусът на **описаната сфера около призма.**

Триъгълник със страни 6 cm, 8 cm и 10 cm е правоъгълен с хипотенуза 10 cm

$\Rightarrow$ радиусът на описаната около основата окръжност е $R_1=5$ cm.

От питагоровата теорема за радиуса на описаната сфера получаваме $R^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2+R_1^{\,2}=144+25$, $R=13$.



16. Задача за **описана сфера около призма.**

$OO_1=OO_2=\frac{h}{2}$, $OC=R$

$$\Rightarrow\ CO_1=\sqrt{R^2-\frac{h^2}{4}}=\frac{\sqrt{4R^2-h^2}}{2}.$$

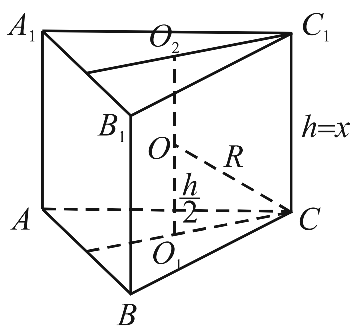
От друга страна $CO_1=\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}$ $\Rightarrow$ $a=\sqrt{3}CO_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{4R^2-h^2}$.

Нека $h=x$, $x\in(0,2R)$.

$$V(x)=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}.x=\frac{3}{4}(4R^2-x^2)\frac{\sqrt{3}}{4}x=\frac{3\sqrt{3}}{16}(4R^2x-x^3).$$

Разглеждаме функцията $f(x)=4R^2x-x^3$, $x\in(0,2R)$.

$f'(x)=4R^2-3x^2=0$, $x_{1,2}=\pm\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.



В интервала $(0, 2R)$ производната има единствен корен $x=\frac{2\sqrt{3}R}{3}$ и сменя знака си от + на –

около $x=\frac{2\sqrt{3}R}{3}$ $\Rightarrow$ f има локален максимум и приема най-голяма стойност при $x=\frac{2\sqrt{3}R}{3}$.

Максималният обем е $V(\frac{2\sqrt{3}}{3}R) = \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4R^2 2\sqrt{3}R}{3}-\frac{8.3\sqrt{3}R^3}{27}\right) = R^3$.

2) Вписана сфера

Задачи – призма и вписана сфера

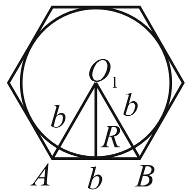
17. Търси се радиусът на **вписаната сфера в призма.**

$R=\frac{a}{2}$.

18. Даден е радиусът на **вписаната сфера в призма.**

За височината на призмата имаме $h=2R$.

Нека основният ръб е b, а апотемата на основата е a.



Тъй като проекцията на вписаната сфера е вписаната в основата окръжност, то радиусът на сферата е равен на апотемата на основата $\Rightarrow$ $R=a=\frac{b\sqrt{3}}{2}$, откъдето за основния ръб b получаваме $b=\frac{2R\sqrt{3}}{3}$.

За лицето на основата имаме $B=\frac{nba}{2} = \frac{1}{2}6\frac{2R\sqrt{3}}{3}R = 2\sqrt{3}R^2$.

За намиране на S_1 може да постъпим по два начина:

I. Начин. $S_1=2B+6bh = 4\sqrt{3}R^2+6\frac{2R\sqrt{3}}{3}2R = 4\sqrt{3}R^2+8\sqrt{3}R^2 = 12\sqrt{3}R^2$.

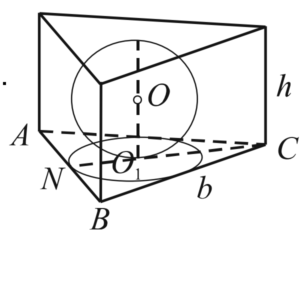
II. Начин. $V=Bh = 2\sqrt{3}R^2 2R = 4\sqrt{3}R^3$.

От формулата $R=\frac{3V}{S_1}$ намираме $S_1=\frac{3V}{R} = \frac{12\sqrt{3}R^3}{R} = 12\sqrt{3}R^2$.

19. Даден е радиусът на **вписаната сфера в призма.**

$h=2R$

Проекцията на вписаната сфера е вписаната в основата окръжност.



Тогава $R=\frac{1}{3}\frac{b\sqrt{3}}{2} = \frac{b\sqrt{3}}{6}$, откъдето намираме основния ръб $b=\frac{6R}{\sqrt{3}}$.

$\Rightarrow$ $V=\frac{b^2\sqrt{3}}{4}h = 6\sqrt{3}R^3$.

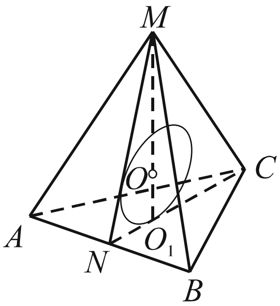
От формулата $R=\frac{3V}{S_1}$ намираме $S_1=\frac{3V}{R} = \frac{18\sqrt{3}R^3}{R} = 18\sqrt{3}R^2$.

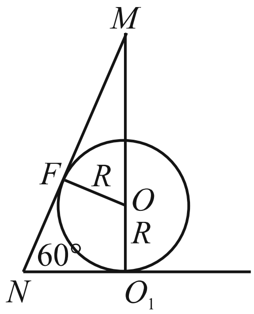
Задачи – пирамида и вписана сфера

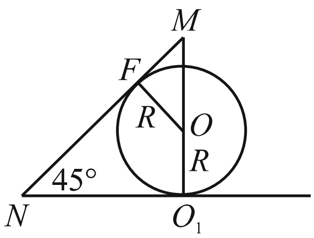
20. Търси се радиусът на **вписаната сфера в пирамида.**

Нека N е среда на AB и $OF \perp MN$. $MO_1 = h$ – височина на пирамидата.

За илюстрация е показана триъгълна пирамида, но правата NO_1 може да пресича основата във връх или страна във вътрешна точка, поради което двата чертежа са недовършени.







а) По условие $\angle O_1NM = 60°$. От ΔFOM имаме $FO = \dfrac{MO}{2}$, т.е. $R = \dfrac{h-R}{2}$, откъдето $R = \dfrac{h}{3}$.

б) По условие $\angle O_1NM = 45° \;\Rightarrow\; OF = MF$.

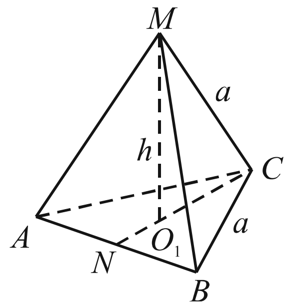
От питагоровата теорема в ΔFOM имаме $OF^2 + FM^2 = MO^2$, т.е. $R^2 + R^2 = (h-R)^2$,

$R^2 + 2hR - h^2 = 0$, $R_{1,2} = -h \pm \sqrt{h^2 + h^2} = -h \pm h\sqrt{2}$.

$\Rightarrow\; R = h(\sqrt{2} - 1)$.

21. Търси се радиусът на **вписаната сфера в пирамида.**

MO_1 – височина на тетраедъра.



От ΔO_1CM: $MO_1 = MC^2 - CO_1^2$, т.е. $h^2 = a^2 - \dfrac{a^2}{3}$, $h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$.

Намираме обема и повърхнината на тетраедъра:

$V = \dfrac{1}{3}Bh = \dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\dfrac{a\sqrt{6}}{3} = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{12}$,

$S_1 = 4B = 4\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$.

Радиусът на вписаната сфера е $R = \dfrac{3V}{S_1} = \dfrac{3a^3\sqrt{2}}{12a^2\sqrt{3}} = \dfrac{a\sqrt{6}}{12}$.

22. Търси се радиусът на **вписаната сфера в пирамида.**

Намираме обема и повърхнината на пирамидата.

$V = \dfrac{1}{3}\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}h = \dfrac{a^2h\sqrt{3}}{12}$.

За апотемата на пирамидата имаме $k^2 = h^2 + \left(\dfrac{1}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$, $k^2 = h^2 + \dfrac{a^2}{12}$, $k^2 = \dfrac{12h^2 + a^2}{12}$.

$\Rightarrow\ S_1 = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3ak}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3a\sqrt{12h^2+a^2}}{2.2\sqrt{3}} = \dfrac{3a(a+\sqrt{12h^2+a^2})}{4\sqrt{3}}$.

Радиусът на вписаната сфера е $R = \dfrac{3V}{S_1} = \dfrac{3a^2h\sqrt{3}.4\sqrt{3}}{12.3a(a+\sqrt{12h^2+a^2})} = \dfrac{ah}{a+\sqrt{12h^2+a^2}}$.

23. Търси се радиусът на **вписаната сфера в пирамида.**
Намираме обема и повърхнината на пирамидата.

$V = \dfrac{1}{3}a^2h$.

Намираме апотемата на пирамидата от питагоровата теорема: $k = \sqrt{h^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{4h^2+a^2}}{2}$.

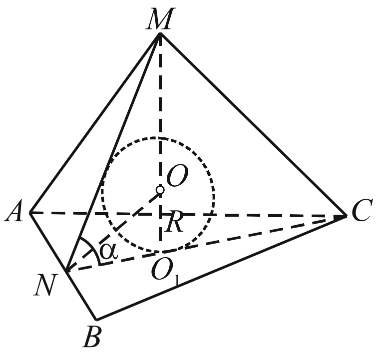
$S_1 = a^2 + 4.\dfrac{ak}{2} = a^2 + 4.\dfrac{a\sqrt{4h^2+a^2}}{2.2} = a(a+\sqrt{4h^2+a^2})$.

Радиусът на вписаната сфера е $R = \dfrac{3V}{S_1} = \dfrac{3a^2h}{3a(a+\sqrt{4h^2+a^2})} = \dfrac{ah}{a+\sqrt{4h^2+a^2}}$.

26. Търси се радиусът на **вписаната сфера в пирамида.**
Нека N е среда на AB.

От ΔNO_1M: $\dfrac{h}{O_1N} = \operatorname{tg}\alpha \ \Rightarrow\ O_1N = \dfrac{h}{\operatorname{tg}\alpha}$.

От ΔNO_1O: $\dfrac{R}{O_1N} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} \ \Rightarrow\ R = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}O_1N = \dfrac{h\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$.



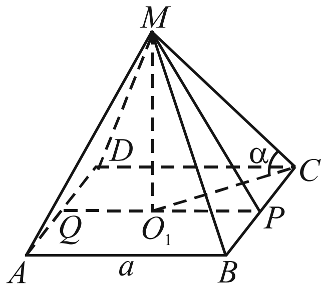
27. Търси се радиусът на **вписаната сфера в пирамида.**

Ще намерим R по формулата $R = \dfrac{3V}{S_1}$.

$CO_1 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\dfrac{h}{CO_1} = \operatorname{tg}\alpha \ \Rightarrow\ h = CO_1\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

$\Rightarrow\ 3V = \dfrac{a^2a\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{2}a^3\sin\alpha}{2\cos\alpha}$.



Апотемата на пирамидата е:

$MP = \sqrt{h^2+O_1P^2} = \sqrt{\dfrac{2a^2\operatorname{tg}^2\alpha}{4} + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a}{2}\sqrt{2\operatorname{tg}^2\alpha+1} = \dfrac{a\sqrt{2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}{2\cos\alpha} = \dfrac{a\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{2\cos\alpha}$.

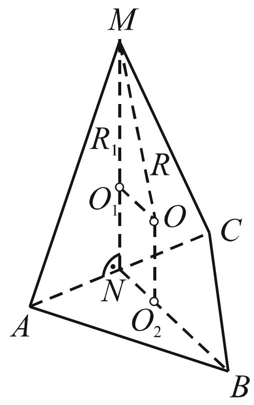
$\Rightarrow\ S_1 = a^2 + 4.\dfrac{a.a\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{2.2\cos\alpha} = a^2\left(\dfrac{\cos\alpha+\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\cos\alpha}\right)$.

$\Rightarrow\ R = \dfrac{3V}{S_1} = \dfrac{\sqrt{2}a^3\sin\alpha}{2\cos\alpha}.\dfrac{\cos\alpha}{a^2(\cos\alpha+\sqrt{1+\sin^2\alpha})} = \dfrac{\sqrt{2}a\sin\alpha}{2(\cos\alpha+\sqrt{1+\sin^2\alpha})}$.

Задачи – вписана и описана сфера

29. Задача за **описана сфера около пирамида.**

Нека височината на пирамидата минава през средата N на AC.



Означаваме с O_1 и O_2 центровете на описаните окръжности съответно около ΔMAC и ΔABC, R_1 – радиусът на описаната около ΔMAC окръжност.

Както в задача 28 установяваме, че четириъгълникът NO_2OO_1 е правоъгълник (O е центърът на описаната сфера).

В ΔABC имаме $BN = 3$, $NO_2 = \dfrac{1}{3}BN = 1$.

Ако страната на ΔABC е a, то $BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $3 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $a = 2\sqrt{3}$.

В ΔMAN $AN = \dfrac{a}{2} = \sqrt{3}$ и по условие $MN = \sqrt{3}$, откъдето следва, че $\angle CAM = \angle ACM = 45°$,

т.е. ΔMAC е равнобедрен и правоъгълен $\Rightarrow$ $R_1 = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

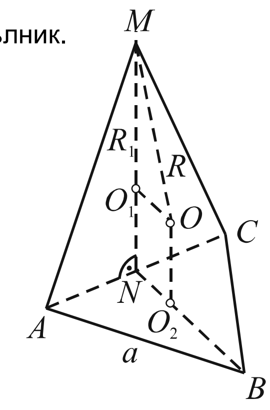
ΔO_1OM: $R = \sqrt{R_1^2 + O_1O^2} = \sqrt{3+1} = 2$.

$\Rightarrow$ обемът на описаното кълбо е $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{32\pi}{3}$.

30. Задача за **описана сфера около пирамида.**

Означаваме с O_1 и O_2 центровете на описаните окръжности съответно около ΔMAC и ΔABC.

Както в задача 28 установяваме, че четириъгълникът NO_2OO_1 е правоъгълник.



$h = MN = BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $NO_2 = \dfrac{1}{3}BN = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$.

$MN = BN \;\Rightarrow\; \Delta ANM \cong \Delta ANB \;\Rightarrow\; \Delta AMC \cong \Delta ABC \;\Rightarrow\; AM = a$.

$MO_1 = \dfrac{2}{3}MN = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

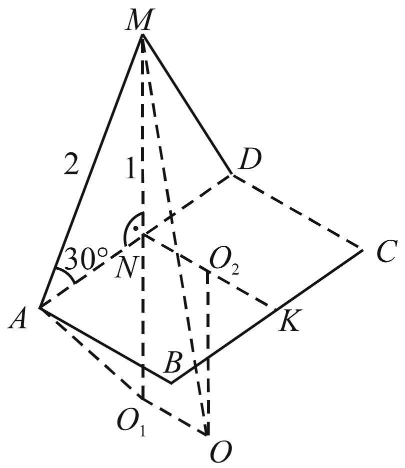
ΔO_1OM: $R = \sqrt{MO_1^2 + O_1O^2}$,

$25 = \dfrac{a^2}{3} + \dfrac{a^2}{12}$, $a = 2\sqrt{15}$ $\Rightarrow$ $h = 3\sqrt{5}$.

$B = \dfrac{ah}{2} = \dfrac{2\sqrt{15}\,3\sqrt{5}}{2} = 15\sqrt{3}$,

$V = \dfrac{Bh}{3} = \dfrac{15\sqrt{3}\,3\sqrt{5}}{3} = 15\sqrt{15}$.

31. б) Задача за **описана сфера около пирамида.**



По условие $AD = 2\sqrt{3} \;\Rightarrow\; AN = \sqrt{3}$.

От ΔANM: $MN = \sqrt{4-3} = 1$.

$\Rightarrow\; \angle MAN = 30°$ и $\angle AMN = 60°$.

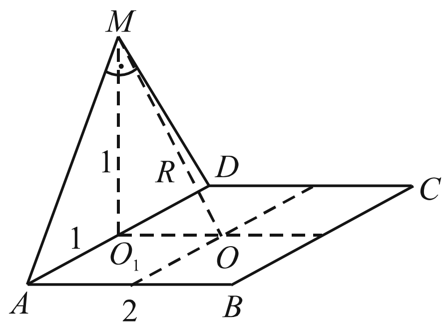
Нека O_1 и O_2 са центровете на описаните окръжности съответно около стените ADM и $ABCD$. Тогава перпендикулярите към (ADM) и ($ABCD$), минаващи съответно през O_1 и O_2, ще лежат в равнината (MNK) и ще се пресичат. Пресечната им точка O е центърът на **описаната сфера**.

В този случай ΔAO_1M е равностранен $MO_1 = AM = 2$ и точки O_1 и O са външни за пирамидата.

И при това разположение на точките имаме $O_1O = NO_2 = \sqrt{3}$.

$\Rightarrow\; R = \sqrt{MO_1^2 + O_1O^2} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$ и $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{28\sqrt{7}\pi}{3}$.

32. Задача за **описана сфера около пирамида.**



O_1 – среда на AD, O – център на основата.

O_1 е центърът на описаната окръжност около ΔADM. Тогава правата OO_1 минава през O_1 и е перпендикулярна на стената (ADM).

Центърът на описаната сфера е пресечната точка на OO_1 и правата, която минава през O и е перпендикулярна на $ABCD$ $\Rightarrow$ центърът на <u>*описната сфера*</u> е точка O.

$$h = MO_1 = 1,\quad R = MO = \sqrt{2},\quad \frac{V_{пирам.}}{V_к} = \frac{\frac{1}{3}a^2h}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{\sqrt{2}}{4\pi}.$$

33. Задача за **описана сфера около пирамида**.

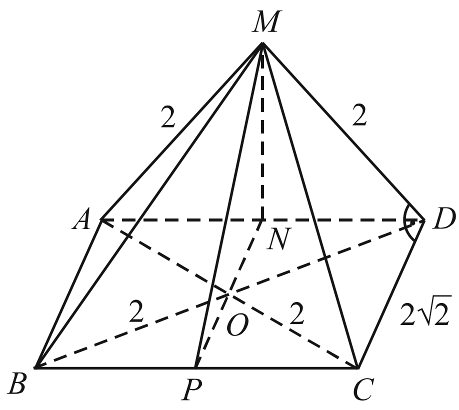
Нека N и P са средите съответно на AD и BC.

Както и в задача 32 установяваме, че центърът на **описаната сферата** O съвпада с центъра на квадрата. $\Rightarrow\; OA = OOC = OD = R = 2 \;\Rightarrow$ страната на квадрата $a = 2\sqrt{2}$

От ΔADM: $MN = \sqrt{2}$, $AM = DM = 2$.

От ΔMPN: $MP = \sqrt{10}$.

$\Delta BAM \cong \Delta CDM$ и $CD \perp AD$.



Повърхнината на пирамидата е:

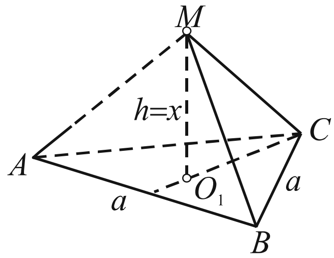
$S_1 = S_{ABCD} + S_{ADM} + 2S_{ABM} + S_{BCM} =$

$= (2\sqrt{2})^2 + \dfrac{2.2}{2} + 2.\dfrac{2.2\sqrt{2}}{2} + \dfrac{2\sqrt{2}.\sqrt{10}}{3} =$

$= 8 + 2 + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{2} = 10 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$.

34. Задача за **описана сфера около пирамида.**

Построяваме голяма окръжност k през ръба MC.



Нека $M \to O_1$ в равнината $ABC,\ AB = a$, $MC = l$.

Нека $MO_1 = h = x$.

От равностранния ΔABC: $CO_1 = \frac{2}{3}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Имаме:

$$\left| \begin{array}{ll} l^2 = x^2 + \frac{a^2}{3} & -\text{от } \Delta MO_1C \\ l^2 = 2Rx & -\text{от формулата } R = \frac{l^2}{2h} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{a^2}{3} = x(2R - x), \quad a^2 = 3x(2R-x), \quad x \in (0, 2R)$$

$$V = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}h, \quad V(x) = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}3x(2R-x)x = \frac{\sqrt{3}}{4}(2Rx^2 - x^3).$$

Нека $f(x) = 2Rx^2 - x^3$, $x \in (0, 2R)$.

$f'(x) = 4Rx - 3x^2 = x(4R - 3x)$, производната има единствен корен $x = \frac{4R}{3}$ в $(0, 2R)$ и около него си сменя знака от + на – $\Rightarrow$ $f(x)$ има локален максимум при $x = \frac{4R}{3}$ и приема най-голяма стойност.

При $h = x = \frac{4R}{3}$ за основния ръб на пирамидата получаваме

$$a^2 = 3x(2R-x) = 3.\frac{4R}{3}(2R - \frac{4R}{3}) = \frac{8R^2}{3} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{6}}{3}R.$$

От ΔO_1CM за околния ръб намираме: $l = MC = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$.

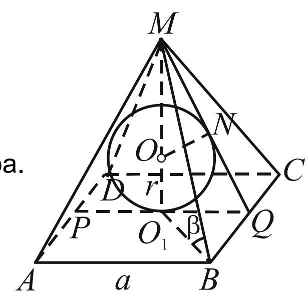
$\Rightarrow$ $l = a$ $\Rightarrow$ пирамидата е правилен тетраедър.

Обемът на пирамидата е $V_{\max} = V(\frac{4R}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2R\frac{16R^2}{9} - \frac{64R^3}{27}\right) = \frac{8\sqrt{3}R^3}{27}$.

$$\sin \angle O_1MC = \frac{CO_1}{MC} = \frac{a\sqrt{3}}{3a} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \ \cos\varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

35. Търси се радиусът на **вписаната сфера в пирамида.**

Ако O_1 е центърът на $ABCD$ и a е страната му, то $O_1B = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



От ΔO_1BM : $\frac{h}{O_1B} = \operatorname{tg}\beta \Rightarrow \frac{2h}{a\sqrt{2}} = \operatorname{tg}\beta$, $a = \frac{\sqrt{2}h}{\operatorname{tg}\beta}$.

$\Delta O_1QM \sim \Delta NOM \Rightarrow \frac{a}{2h} = \frac{r}{MN}$, където r е радиусът на вписаната сфера.

$\Rightarrow MN = \sqrt{2}r\operatorname{tg}\beta$.

От ΔONM: $OM^2 = ON^2 + MN^2$, $(h-r)^2 = r^2 + 2r^2\operatorname{tg}^2\beta$.

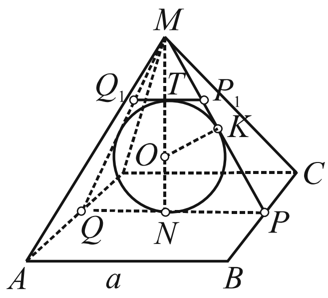
Получаваме квадратно уравнение за r: $2\operatorname{tg}^2\beta.r^2 + 2hr - h^2 = 0$,

$$r_{1,2} = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 + 2h^2\operatorname{tg}^2\beta}}{2\operatorname{tg}^2\beta} \Rightarrow r = \frac{h(\sqrt{1 + 2\operatorname{tg}^2\beta} - 1)}{2\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{h}{1 + \sqrt{1 + 2\operatorname{tg}^2\beta}}.$$

36. Задача за **вписана сфера в пирамида.**

В ΔQPM е вписана голяма окръжност на кълбото.

Нека равнината на сечението пресича MQ и MP съответно в точки Q_1 и P_1 $\Rightarrow$ $Q_1P_1 \parallel QP$.



От ΔNPM: $MP = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$.

Нека радиусът на кълбото е r. $\Delta MOK \sim \Delta MPN$

$\Rightarrow \dfrac{MO}{OK} = \dfrac{MP}{NP}$ или $\dfrac{20 - r}{r} = \dfrac{25}{15}$, $r = \dfrac{15}{2}$

$\Rightarrow h_1 = MT = h - 2r = 20 - 15 = 5$.

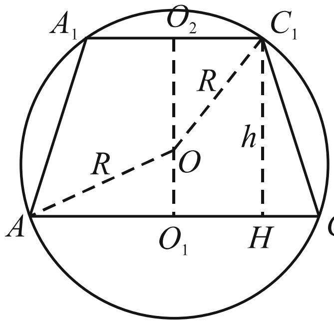
Нека частта от пирамидата над сечението има обем V_1 и лице на основата B_1, а пирамидата – обем V и лице на основата B.

$\Rightarrow \dfrac{V_1}{V} = \dfrac{B_1\ h_1}{B\ h} = \dfrac{h_1^3}{h^3} = \dfrac{5^3}{20^3} = \dfrac{1}{64}$. Търсеното отношение е $1{:}63$.

37 Задача за **описана сфера около пресечена пирамида.**

Нека пресечената пирамида е $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с голяма основа $ABCD$.

Нека O_1 и O_2 са центровете на двете основи. Означаваме $CC_1 = x$ и $OO_2 = y$.



$AO_1 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = 24$, $A_1B_1 = b \Rightarrow A_1C_1 = b\sqrt{2}$.

$$\begin{array}{l|l} \Delta OC_1O_2 & y^2 + (\frac{b\sqrt{2}}{2})^2 = 25^2 \\ \Delta OAO_1 & (22 - y)^2 + 24^2 = 25^2 \end{array} \quad , \ y = 15,\ b = 20\sqrt{2}$$

$\Rightarrow A_1C_1 = b\sqrt{2} = 40$.

$AC = a\sqrt{2} = 48$

От ΔHCC_1: $CC_1^2 = HC^2 + h^2 = \left(\dfrac{48 - 40}{2}\right)^2 + 22^2 = 500 \Rightarrow CC_1 = 500$.

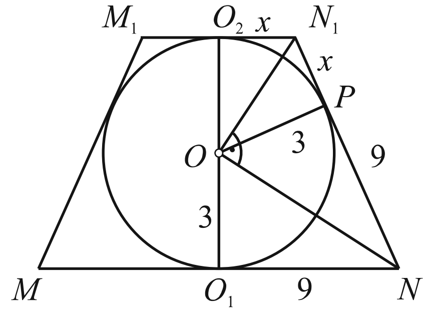
38. Задача за **вписана сфера в пресечена пирамида.**

Нека пресечената пирамида е $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с голяма основа $ABCD$.

Нека O_1 и O_2 са центровете на двете основи, M, N, M_1 и N_1 са средите съответно на AD, BC, A_1D_1 и B_1C_1.

ΔNON_1 е правоъгълен, защото ON и ON_1 са ъглополовящи и $\angle MNN_1 + \angle M_1N_1N = 180°$.

$OP = OO_1 = OO_2 = r = 3$ cm.



$NP = NO_1 = \dfrac{a}{2} = 9$, $N_1P = N_1O_2 = x$, $x > 0$.

OP е височина към хипотенузата в правоъгълния ΔNON_1

$\Rightarrow OP^2 = NP.N_1P$, $3^2 = 9x^2$, $x = 1$

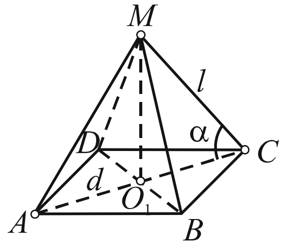
$\Rightarrow A_1B_1 = M_1N_1 = 2x = 2$ cm, $NN_1 = 10$ cm

$\Rightarrow S = 4\dfrac{MN + M_1N_1}{2}.NN_1 = 400 \text{ cm}^2 = 4 \text{ dm}^2$.

39. Търси се радиусът на **описаната сфера около пирамида.**

Околните ръбове са равни, защото сключват равни ъгли с равнината на основата.

Проекцията на M точка O_1 съвпада с пресечната точка на диагоналите.



Означаваме $MC = l$ и $AC = d$.

Лицето на основата е $B = \dfrac{d^2 \sin\varphi}{2} \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{\dfrac{2B}{\sin\varphi}}$.

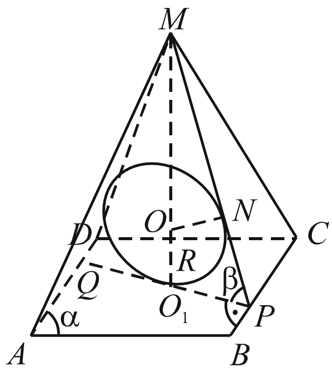
От ΔMO_1C : $l = \dfrac{d}{2\cos\alpha} = \dfrac{1}{2\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{2B}{\sin\varphi}} = \dfrac{1}{\cos\alpha}\sqrt{\dfrac{B}{2\sin\varphi}}$

и $h = l\sin\alpha$.

$$\Rightarrow \quad R^2 = \frac{l^2}{2h} = \frac{l^2}{2l\sin\alpha} = \frac{l}{2\sin\alpha} = \frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}\sqrt{\frac{B}{2\sin\varphi}} = \frac{1}{\sin 2\alpha}\sqrt{\frac{B}{2\sin\varphi}} .$$

40. Задача за **вписана сфера в пирамида.**

$M \to O_1$ – център на вписаната в $ABCD$ окръжност.



Построяваме равнина λ през MO_1 и перпендикулярна на BC. Тогава сечението на λ с пирамидата е равнобедреният ΔQPM, където $PQ \perp BC$, $PQ \ni O_1$, $MP \perp BC$ и $\angle MPQ = \beta$.

Сечението на λ със сферата е голяма окръжност с център O, вписана в $\Delta MPQ \;\Rightarrow\; OO_1 = R$ и PO е ъглополовяща на $\angle MPQ$.

Нека $AB = a$ и $PQ = h_1 \quad \Rightarrow \quad h_1 = a\sin\alpha$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{h_1}{\sin\alpha} \quad \Rightarrow \quad S_{ABCD} = ah_1 = \frac{h_1^2}{\sin\alpha} .$$

От ΔOO_1P имаме $\dfrac{h_1}{2} = O_1P = R\,\mathrm{cotg}\dfrac{\beta}{2} \quad \Rightarrow \quad h_1 = 2R\,\mathrm{cotg}\dfrac{\beta}{2}$.

Решението може да продължи по два начина – да намерим повърхнината по формулата $S_1 = \dfrac{3V}{R}$ или като сбор от лицата на стените на пирамидата.

Ще покажем втория начин.

От ΔMPO_1 имаме $\dfrac{O_1P}{MP} = \cos\beta$ и намираме апотемата $MP = \dfrac{h_1}{2\cos\beta}$.

За повърхнината на пирамидата имаме:

$$S_1 = \frac{h_1^2}{\sin\alpha} + 4.\frac{1}{2}.\frac{h_1}{\sin\alpha}.\frac{h_1}{2\cos\beta} = \frac{h_1^2}{\sin\alpha}\left(1 + \frac{1}{\cos\beta}\right) = \frac{h_1^2}{\sin\alpha}\,\frac{\cos\beta + 1}{\cos\beta} = \frac{h_1^2\, 2\cos^2\dfrac{\beta}{2}}{\sin\alpha\cos\beta} .$$

Заместваме h_1 с равното му и окончателно получаваме $S_1 = \dfrac{8R^2\,\mathrm{cotg}^2\dfrac{\beta}{2}\cos^2\dfrac{\beta}{2}}{\sin\alpha\cos\beta}$.