2.3. Комбинации от ротационни тела

1) Ротационни тела

2. Последователно извършваме изчисленията:

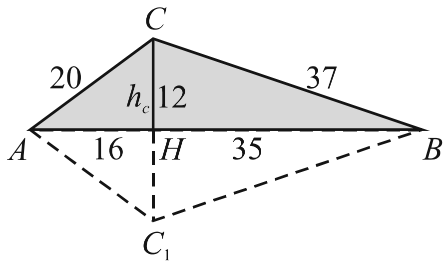
$$P = 20 + 37 + 51 = 108,\ p = 54,\ S = \sqrt{54.34.17.3} = 306,\ h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2.306}{51} = 12.$$

$$AH = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16,\ BH = 35,\ h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2.306}{37} = \frac{612}{37},\ h_b = \frac{2S}{b} = \frac{2.306}{20} = \frac{153}{5}.$$

а) Тялото се състои от два конуса с обща основа с радиус $r = 12$.

Повърхнината на тялото е сбор от околните повърхнини на двата конуса с образуващи $l_1 = 20$, $l_2 = 37$:

$$S = \pi r l_1 + \pi r l_2 = \pi r(l_1 + l_2) = \pi 12.57 = 684\pi.$$



Обемът е сбор от обемите на двата конуса. Както показахме в задача 1., обемът на тялото е равен на обема на конус със същия радиус и с височина – сбор от двете височини, което е отсечката $AB = 51$.

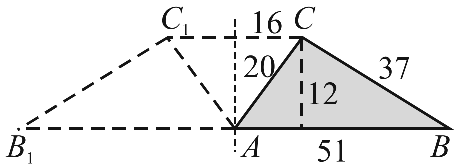
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi 12^2.51 = 2448\pi.$$

б) Повърхнината е равна на сбора от:

– околната повърхнина на пресечен конус с $r = 16$, $R = 51$, $l_2 = 37$;

– околната повърхнина на конус с $r = 16$, $l_1 = 20$;

– кръг с $R = 51$.



$$S = \pi l_2(R + r) + \pi r l_1 + \pi R^2 = \pi 37.67 + \pi 16.20 + \pi 51^2 = 5400\pi.$$

Обемът се получава като от обема на пресечен конус с $r = 16$, $R = 51$ и $h = 12$ извадим обема на конус с $r = 16$ и $h = 12$.

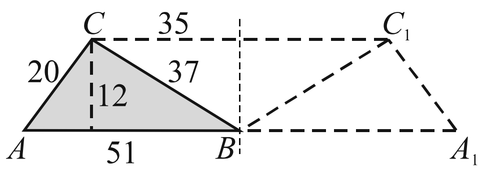
$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr) - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr) = \frac{\pi 12}{3}(51^2 + 51.16) = 4\pi 3417 = 13668\pi..$$

в) Повърхнината е равна на сбора от:

– околната повърхнина на пресечен конус с $r = 35$, $R = 51$, $l_1 = 20$;

– околната повърхнина на конус с $r = 35$, $l_2 = 37$;

– кръг с $R = 51$.

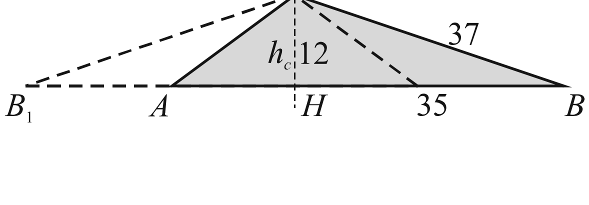


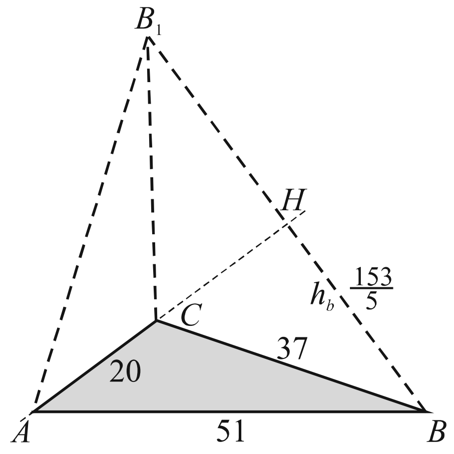
$$S = \pi l_1(R + r) + \pi r l_2 + \pi R^2 = \pi 20.86 + \pi 35.37 + \pi 51^2 = 5616\pi.$$

Обемът се получава, както обема на тялото от б).

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr) - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr) = \frac{\pi 12}{3}(51^2 + 51.35) = 4\pi 4386 = 17544\pi$$

г) Тялото е конус с $r = 35$, $l = 37$ и $h = 12$. $S_1 = \pi r(r + l) = 2520\pi$, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 4900\pi$.



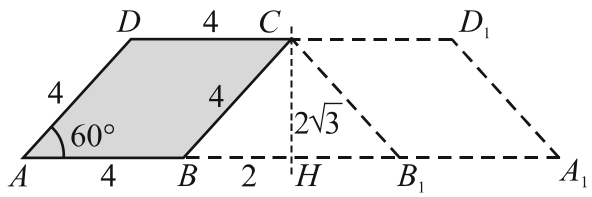


д) Ъгъл ACB е тъп и, както показахме в задача 1. в), повърхнината на тялото е

$$S = \pi h_b(AB + BC) = \pi\frac{153}{5}(51+37) = \frac{13464}{5}\pi,$$

а обемът е $V = \frac{1}{3}\pi h_b^{\ 2}.AC = \frac{\pi}{3}\left(\frac{153}{5}\right)^2.20 = \frac{31212}{5}\pi$.

4. Нека $ABCD$ е ромб, $AB = 4$ cm, $\angle BAD = 60°$.



а) Ромбът е завъртян около права g през точка C, $g \perp AB$ и $g \cap AB = H$.

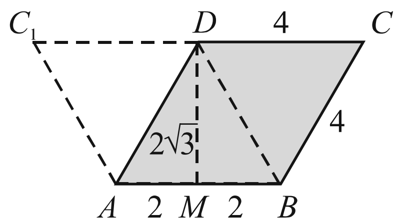
Нека A_1 и B_1 са симетричните точки съответно на A и B относно g.

Повърхнината на полученото тяло се получава като от повърхнината на пресечен конус с радиуси $CD = r = 4$ и $AH = R = 6$ и образуваща $l = 4$ извадим лицето на кръг с радиус $BH = r_1 = 2$ и добавим околната повърхнина на конус с радиус $r_1 = 2$ и образуваща $l = 4$.

$$S = \pi l(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2 - \pi r_1^2 + \pi r_1 l = (4.10+36+16-4+8)\pi = 96\pi.$$

Обемът на тялото се получава като от обема на пресечен конус с $r = 4$, $R = 6$, $h = 2\sqrt{3}$ извадим обема на конус с $r_1 = 2$, $h = 2\sqrt{3}$.

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr) - \frac{1}{3}\pi r_1^2 h = \frac{1}{3}\pi 2\sqrt{3}(36+16+24) - \frac{1}{3}\pi 4.2\sqrt{3} = 48\sqrt{3}\pi.$$



б) Ромбът е завъртян около правата $DM \perp AB$.,

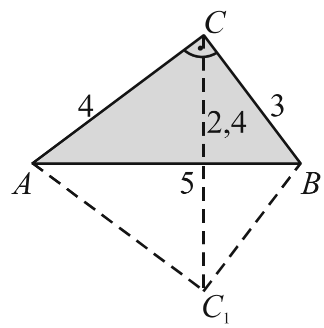
Нека C_1 е симетричната на C относно DM. Означаваме $AM = r$, $DC = R$, $BC = l$, $DM = h$.

Полученото тяло е пресечен конус с $r = 2$, $R = 4$, $l = 4$ и $h = 2\sqrt{3}$.

$$S_1 = \pi l(R+r) + \pi R^2 + \pi r^2 = 44\pi,$$

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{56\sqrt{3}}{3}\pi.$$

5.

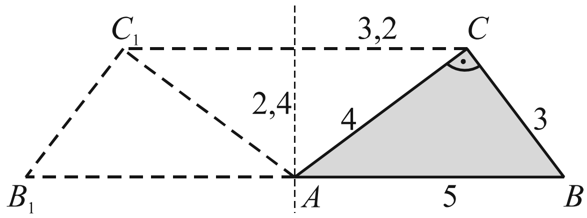


а) Повърхнината на тялото е сбор от околните повърхнини на два конуса с обща основа с $r = 2,4$ и околни ръбове $l_1 = 4$, $l_2 = 3$.

$S = \pi r l_1 + \pi r l_2 = 16,8\pi$.

Обемът е сбор от обемите на два конуса с обща основа, значи е равен на обема на конус с тази основа, $r = 2,4$ и височина – сбор от височините на двата конуса, което е хипотенузата, $h = 5$.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 9,6\pi$.



б) Повърхнината е равна на сбора от:

– околната повърхнина на пресечен конус с $r = 3,2$, $R = 5$, $l_2 = 3$;

– околната повърхнина на конус с $r = 3,2$, $l_1 = 4$;

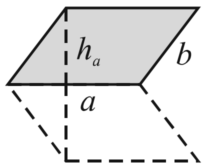
– кръг с $R = 5$.

$S = \pi l_2(R + r) + \pi r l_1 + \pi R^2 \;=\; 62,4\pi$.

Обемът се получава като от обема на пресечен конус с $r = 3,2$, $R = 5$ и $h = 2,4$ извадим обема на конус с $r = 16$ и $h = 12$.

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr) - \frac{1}{3}\pi r^2 h \;=\; \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr) \;=\; 32,8\pi .$$

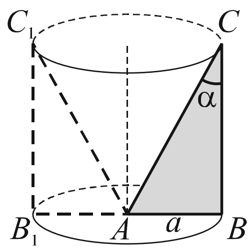
6.



а) Тялото има обем, равен на обема на цилиндър с радиус, равен на височината h_a и височина, равна на страната a, $V_a = \pi {h_a}^2 a$, където $h_a = \dfrac{S}{a} \;\Rightarrow\; V_a = \pi \dfrac{S^2}{a^2} a = \dfrac{S^2}{a}\pi$.

б) Аналогично на V_a получаваме $V_b = \dfrac{S^2}{b}\pi$. Тогава $\dfrac{V_a}{V_b} = \dfrac{\dfrac{S^2}{a}\pi}{\dfrac{S^2}{b}\pi} = \dfrac{b}{a}$.

7.



Нека в ΔABC $\angle B = 90^\circ$ и $AB < BC$. Триъгълник ABC се върти около права $g \ni A$ и $g \parallel BC$.

Нека върхът B описва окръжност k, а върхът C – окръжност k_1.

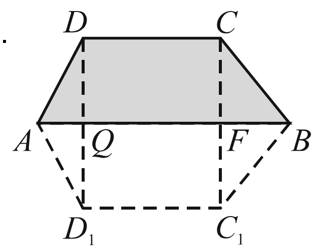
Тялото, чийто обем V се търси, е съставено от цилиндър с основи k и k_1 и височина BC, от който е изваден конус с основа k_1 и връх A.

Нека $AB = a \;\Rightarrow\; BC = \dfrac{a}{\operatorname{tg}\alpha} \;\Rightarrow\; S = \dfrac{AB.BC}{2} = \dfrac{a^2}{2\operatorname{tg}\alpha} \;\Rightarrow\; a^2 = 2S\operatorname{tg}\alpha$, $BC = \dfrac{\sqrt{2S\operatorname{tg}\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$.

$V_ц = \pi a^2 BC$, $V_к = \dfrac{\pi}{3} a^2 BC$,

$$V = V_ц - V_к \;=\; \pi a^2 BC - \frac{\pi}{3} a^2 BC \;=\; \frac{2}{3}\pi a^2 BC \;=\; \frac{2\pi}{3} 2S\operatorname{tg}\alpha \frac{\sqrt{2S\operatorname{tg}\sigma}}{\operatorname{tg}\alpha} \;=\; \frac{4\pi}{3} S\sqrt{2S\operatorname{tg}\alpha} .$$

8.



Нека търсените повърхнини и обеми са S_{AB}, S_{CD}, S_{AD}, V_{AB}, V_{CD}, V_{AD}.

– При завъртане около AB.

Нека C_1 и D_1 са симетричните точки съответно на C и D относно AB.

Нека $CC_1 \cap AB = F$ и $DD_1 \cap AB = Q$.

Означаваме с S_{AQD}, S_{FBC} и S_{QFCD} околните повърхнини на телата, получени при завъртането съответно на ΔAQD, ΔFBC и $QFCD$ около правата AB. Аналогично V_{AQD}, V_{FBC} и V_{QFCD} са обемите на тези тела.

S_{AB} се състои от околните повърхнини на два конуса и един цилиндър:

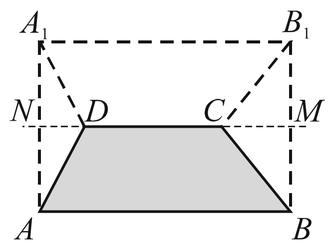
$S_{AB} = S_{AQD} + S_{FBC} + S_{QFCD} = \pi h.AD + \pi h.BC + 2\pi h.DC = \pi h(c+d+2b)$.

V_{AB} се състои от обемите на два конуса и цилиндър:

$$V_{AB} = V_{AQD} + V_{FBC} + V_{QFCD} = \frac{1}{3}\pi h^2.AQ + \frac{1}{3}\pi h^2.FB + \pi h^2 b = \frac{1}{3}\pi h^2.(AQ+FB) + \pi h^2 b =$$

$$= \frac{1}{3}\pi h^2.(a-b) + \pi h^2 b = \frac{1}{3}\pi h^2.(a-b) + \pi h^2 b = \frac{\pi h^2(a+2b)}{3}.$$

– При завъртане около CD.



Нека A_1 и B_1 са симетричните точки съответно на A и B относно CD.

Нека $AA_1 \cap CD = N$ и $BB_1 \cap CD = M$.

Означаваме S_{DNA}, S_{MCB} и S_{MNAB} околните повърхнини на телата, получени при завъртането съответно на ΔDNA, ΔMCB и $MNAB$ около правата DC. Аналогично V_{DNA}, V_{MCB} и V_{MNAB} са обемите на тези тела.

S_{CD} се състои от околните повърхнини на два конуса и един цилиндър:

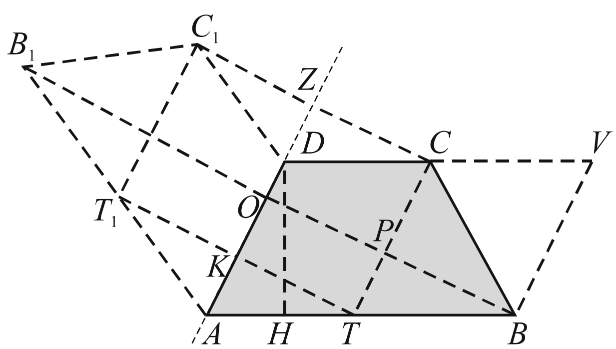
$S_{CD} = S_{DNA} + S_{MCB} + S_{MNAB} = \pi h.AD + \pi h.CB + 2\pi h.AB = \pi h(c+d+2a)$.

V_{CD} се получава като от обема на цилиндър се извадят обемите на два конуса:

$$V_{CD} = V_{MNAB} - V_{DNA} - V_{MCB} = \pi h^2 AB - \frac{1}{3}\pi h^2 DN - \frac{1}{3}\pi h^2 MC = \pi h^2 a - \frac{1}{3}\pi h^2(DN+MC) =$$

$$= \pi h^2 a - \frac{1}{3}\pi h^2(a-b) = \frac{\pi h^2(2a+b)}{3}.$$

– При завъртане около AD.



Нека $CT \parallel AD$, $T \in AB$ и $BV \parallel AD$, $V \in CD$. Точките B_1, C_1, T_1 са симетрични съответно на B, C, T относно AD. $TT_1 \cap AD = K$, $BB_1 \cap AD = O$, $CC_1 \cap AD = Z$. Височината на трапеца е $DH \perp AB$, $H \in AB$.

Означаваме $BO = R$ и $CZ = r$ – радиусите на разглежданите тела. Ще изразим R и r чрез дадените елементи.

За r изразяваме лицето на $ATCD$ по два начина: $AT.DH = AD.CZ$, $bh = cr$, $r = \dfrac{bh}{c}$.

За R изразяваме лицето на $ABVD$ по два начина: $AB.DH = AD.BO$, $ah = cR$, $R = \dfrac{ah}{c}$.

Означаваме с S_{OAB}, S_{ZOBC} и S_{ZDC} околните повърхнини на телата, получени при завъртането съответно на ΔOAB, $ZOBC$ и ΔZDC около правата AD. $S_{AD} = S_{OAB} + S_{ZOBC} + S_{ZDC}$ = $\pi R.AB + \pi BC(R+r) + \pi r.CD$ = $\pi\dfrac{ah}{c}a + \pi d(\dfrac{ah}{c} + \dfrac{bh}{c}) + \pi\dfrac{bh}{c}b$ = $\dfrac{\pi h}{c}(a^2 + b^2 + ad + bd)$.

Означаваме с V_{ZOBC}, V_{OKTB}, V_{ZDC} и V_{KAT} обемите на телата, получени при завъртането съответно на $ZOBC$, $OKTB$, ΔZDC и ΔKAT около правата AD.

Ще покажем, че търсеният обем е сбор от обемите на двата пресечени конуса с осни сечения BB_1T_1T и BB_1C_1C.

Първо ще покажем, че $V_{ZDC} = V_{KAT}$.

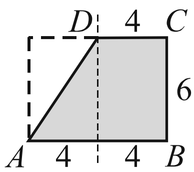
Четириъгълниците $ATCD$ и $KTCZ$ са успоредници, от което имаме $CT = AD = KZ = c$. Получаваме $ZD = KA = c - KO$, тоест височините на двата конуса са равни, но и радиусите им са равни $\Rightarrow$ $V_{ZDC} = V_{KAT}$.

$V_{AD} = V_{OKTB} + V_{ZOBC} - V_{ZDC} + V_{KAT}$, но $V_{ZDC} = V_{KAT}$ $\Rightarrow$ $V_{AD} = V_{OKTB} + V_{ZOBC}$

$V_{AD} = \dfrac{\pi}{3}OK(R^2 + r^2 + Rr) + \dfrac{\pi}{3}ZO(R^2 + r^2 + Rr)$, но $OK + ZO = ZK = c$ $\Rightarrow$

$V_{AD} = \dfrac{\pi c}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \dfrac{\pi c}{3}(\dfrac{a^2h^2}{c^2} + \dfrac{b^2h^2}{c^2} + \dfrac{abh^2}{c^2}) = \dfrac{\pi h^2}{3c}(a^2 + b^2 + ab)$.

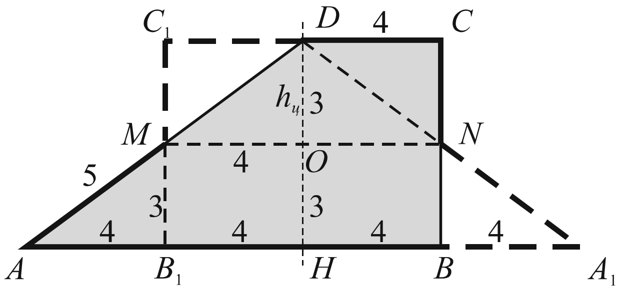
9. Нека $ABCD$ е правоъгълен трапец с тъп ъгъл при върха D.



а) Тялото е цилиндър с $r = 4$, $l = h = 6$.

$S = 2\pi rl = 48\pi$. $V = \pi r^2 h = 96\pi$.

б) Нека $DH \perp AB$.



Нека A_1, B_1, C_1 са симетричните точки съответно на A, B, C относно правата DH $\Rightarrow$ $HA = HA_1 = 8$, $HB = HB_1 = 4$ и $DC_1 = 4$ $\Rightarrow$ точка $M = C_1B_1 \cap AD$ е средата на AD. Аналогично точка $N = CB \cap A_1D$ е средата на BC. Ако $DH \cap MN = O$, то $DO = OH = 3 = h_a$

Тялото се състои от цилиндър с осно сечение $MNCC_1$ „върху” пресечен конус с осно сечение AA_1NM.

Цилиндърът е получен при завъртането на $ONCD$ около DO с елементи: $r = 4$, $l_{ц} = h_{ц} = 3$.

Пресеченият конус е получен при завъртането на $AHOM$ около OH с елементи: $R = 8$, $r = 4$, $h_{\text{пр.к.}} = 3$ и $l_{\text{пр.к.}} = 5$.

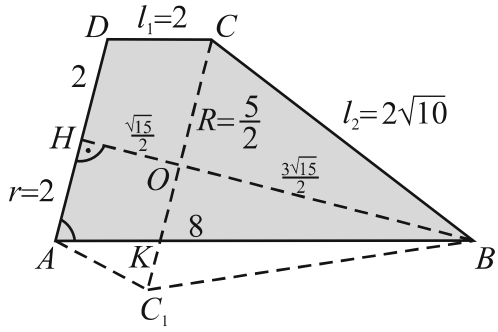
Повърхнината на тялото се състои от околните повърхнини на цилиндъра и на пресечения конус и два кръга с радиуси R и r:

$S = 2\pi r l_{ц} + \pi l_{\text{пр.к.}}(R + r) + \pi R^2 + \pi r^2 = 164\pi$.

Обемът на тялото се състои от обемите на цилиндъра и пресечения конус:

$V = \pi r^2 h_{ц} + \dfrac{\pi}{3}h_{\text{пр.к.}}(R^2 + r^2 + Rr) = 160\pi$.

10.



Нека $s_{AD} \cap AD = H$, $CK \parallel AD$, $K \in AB$, $CK \cap BH = O$, C_1 – симетрична на C относно s_{AD}. $AH = r$, $CO = R$, $DC = l_1 = 2$, $BC = l_2$, $OH = h_1$, $OB = h_2$.

$\cos\angle BAD = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \angle BAD$ е остър ъгъл $\Rightarrow$ $AH > OK \Rightarrow C_1$ е външна за трапеца.

От ΔABH: $\frac{AH}{AB} = \cos\angle BAD = \frac{1}{4} \Rightarrow r = AH = 2$, $CK = AD = 4$, $BH = \sqrt{64-4} = 2\sqrt{15}$.

$CK \parallel AD \Rightarrow \frac{OK}{BK} = \frac{1}{4}$. От $BK = AB - AK = 6 \Rightarrow OK = \frac{3}{2} \Rightarrow R = CO = CK - OK = \frac{5}{2}$;

От ΔKBO $h_2 = OB = \frac{3\sqrt{15}}{2} \Rightarrow h_1 = OH = BH - OB = \frac{\sqrt{15}}{2}$.

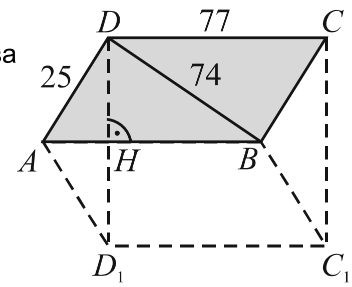
От ΔOBC: $l_2 = BC = \sqrt{BO^2 + OC^2} = 2\sqrt{10}$.

Тялото се състои от пресечен конус с осно сечение C_1CDA и конус с осно счение CC_1B. Повърхнината му е състои от околната повърхнина на пресечения конус, околната повърхнина на конуса и окръжност с радиус *r*. Обемът му се състои от обемите на двете тела.

$$S = \pi l_1(r+R) + \pi R l_2 + \pi r^2 = (13 + 5\sqrt{10})\pi,$$

$$V = \frac{1}{3}\pi h_1(R^2 + r^2 + Rr) + \frac{1}{3}\pi R^2 h_2 = \frac{17\sqrt{15}}{3}\pi.$$

11.



Нека $DH \perp AB$, $H \in AB$. Ще изразим лицето на ΔABD по два начина, за да намерим DH.

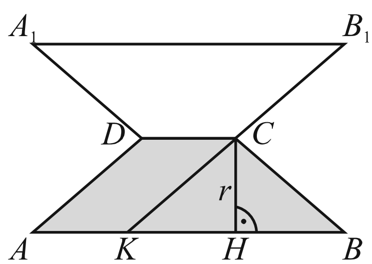
$P_{ABD} = 176$ cm, $p = 88$ cm, $S_{ABD} = \sqrt{88.63.11.14} = 12.77$.

$S_{ABD} = \frac{AB.DH}{2} \Rightarrow \frac{77.DH}{2} = 12.77$, $DH = r = 24$.

Повърхнината на тялото се състои от околните повърхнини на цилиндър и два конуса:

$S = 2\pi r.DC + \pi r.AD + \pi r.BC = 4896\pi$ cm^2.

12.



Нека трапецът е $ABCD$ с голяма основа AB, $CK \parallel AD$, $K \in AB$. Означаваме височината на трапеца с *r*.

От ΔHBC по питагоровата теорема намираме $r = 144$ cm.

Повърхнината на тялото се състои от околните повърхнини на цилиндър с образуваща AB и два конуса с образуващи BC и AD, всички с радиус *r*:

$S = 2\pi rAB + 2\pi rBC = 199296\pi$.

13.

При завъртане на триъгълник със страни $a<b<c$ около всяка от страните a, b и c се получават тела с повърхнини съответно S_a, S_b и S_c и с обеми съответно V_a, V_b, V_c.

Имаме $a<b \ \Rightarrow \ h_a>h_b$.

а) $S_a=\pi h_a b+\pi h_a c=\pi h_a(b+c)$, $S_b=\pi h_b a+\pi h_b c=\pi h_b(a+c)$.

$\dfrac{S_a}{S_b}=\dfrac{\pi h_a(b+c)}{\pi h_b(a+c)}>1 \ \Rightarrow \ S_a>S_b$. Аналогично получаваме $S_b>S_c$.

б) $V_a=\dfrac{1}{3}\pi h_a^{\,2}a$, $V_b=\dfrac{1}{3}\pi h_b^{\,2}b$, $\dfrac{V_a}{V_b}=\dfrac{h_a^{\,2}a}{h_b^{\,2}b}=\dfrac{S_\Delta.h_a}{S_\Delta.h_b}=\dfrac{h_a}{h_b}>1 \ \Rightarrow \ V_a>V_b$. Аналогично $V_b>V_c$.

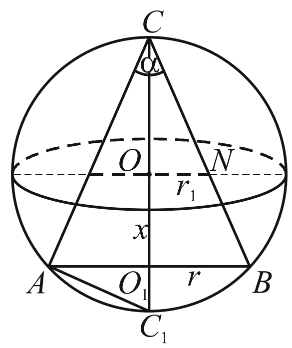
2) Комбинации от ротационни тела

17.

Нека ΔABC е осно сечение на конуса. Тогава $\angle ACB=\alpha$. Нека $CO_1\perp AB$, $O_1\in AB$; равнината пресича CO_1 в центъра на сферата – точка O; $ON \parallel AB$, $N\in BC$.

Означаваме $CO_1=h$, $CO=R=h_1$, $O_1B=r$, $ON=r_1$.

а) Равнината минава през центъра на кълбото и пресича конуса. Следователно центърът на кълбото е вътрешен за конуса и $\alpha<90^\circ$.



От $\Delta ONC \sim \Delta O_1BC$ имаме $\dfrac{h_1}{h}=\dfrac{r_1}{r}$.

По условие $\dfrac{V_1}{V}=\dfrac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h_1}{\frac{1}{3}\pi r^2 h}=\dfrac{r_1^3}{r^3}=\dfrac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{r^3}{r_1^3}=3$.

От синусовата теорема за ΔABC имаме $\dfrac{2r}{\sin\alpha}=2R \ \Rightarrow \ r=R\sin\alpha$.

От ΔONC: $r_1=R\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}$

$$\Rightarrow \ \frac{r^3}{r_1^3}=\left(\frac{R\sin\alpha}{R\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)^3=3 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\sin\alpha}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}\right)^3=3.$$

Последното равенство преобразуваме с използване на тригонометрични формули:

$$\left(\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^3=3$$

$$8\cos^6\frac{\alpha}{2}=3$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt[3]{3}}{2}.$$

Окончателно за $\cos\alpha$ получаваме: $\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-1=\sqrt[3]{3}-1$.

б) Трябва да намерим $\dfrac{S_к}{S_{сф}} = \dfrac{\pi r^2 + \pi rl}{4\pi R^2}$.

Ще изразим rl чрез R и α.

От ΔAC_1C: $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{AC}{CC_1} = \dfrac{l}{2R} \Rightarrow l = 2R\cos\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow rl = 2R^2\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

За отношението $\dfrac{S_к}{S_{сф}}$ получаваме:

$$\frac{S_к}{S_{сф}} = \frac{\pi r^2 + \pi rl}{4\pi R^2} = \frac{R^2\sin^2\alpha + 2R^2\sin\alpha\cos\dfrac{\alpha}{2}}{4R^2} = \frac{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2} + 4\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}{4} =$$

$$= \cos^2\frac{\alpha}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

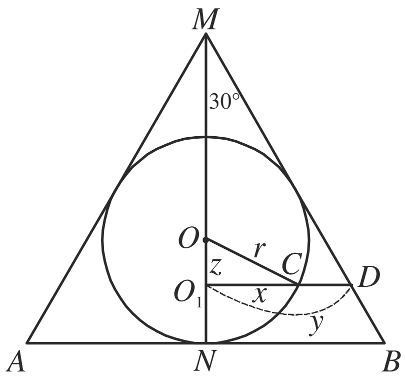
Остава да намерим числов израз за $\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

Имаме $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \cos^2\dfrac{\alpha}{2}} = \sqrt{1 - \dfrac{\sqrt[3]{3}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2 - \sqrt[3]{3}}}{\sqrt{2}}$.

$$\Rightarrow \frac{S_к}{S_{сф}} = \frac{\sqrt[3]{3}}{2}\left(\frac{2 - \sqrt[3]{3}}{2} + \frac{\sqrt{2 - \sqrt[3]{3}}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{9} + \sqrt{2}\sqrt{2\sqrt[3]{9} - 3}}{4}.$$

18.

Нека ΔABM е осно сечение на конуса с вписана окръжност, която е голяма окръжност на сферата, $MN \perp AB$, $N \in AB$; O е центърът на вписаната сфера, O_1, C и D са съответно точките, в които сечението пресича MN, вписаната окръжност и BM. Означаваме $O_1C = x$, $O_1D = y$, $OO_1 = z$.



Имаме: $MN = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$,

$MO = \dfrac{2}{3}MN = 2\sqrt{3}$, $\quad OC = ON = r = \sqrt{3}$.

По условие $\pi y^2 - \pi x^2 = 4\pi \Rightarrow y^2 - x^2 = 4$.

От ΔO_1CO: $x^2 + z^2 = r^2$, $x^2 + z^2 = 3$.

От ΔO_1DM: $\dfrac{MO_1}{y} = \operatorname{cotg} 30^\circ = \sqrt{3}$, $MO_1 = y\sqrt{3}$, $2\sqrt{3} + z = y\sqrt{3}$.

Получихме системата

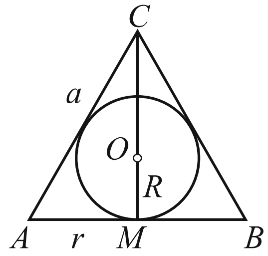
$$\left|\begin{array}{l} y^2 - x^2 = 4 \\ x^2 + z^2 = 3 \\ 2\sqrt{3} + z = y\sqrt{3} \end{array}\right.$$

, която има положителни корени $x = \dfrac{3}{2}$, $y = \dfrac{5}{2}$ и $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Търсеното разстояние е $MO_1 = MO + z = 2\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

19. Нека равностранният ΔABC със страна a е осно сечение на конуса с вписана окръжност, която е голяма окръжност на сферата.

Нека радиусите на конуса и сферата са съответно r и R.



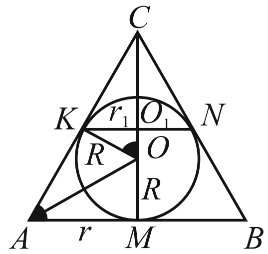
Имаме $r=\frac{a}{2}$, $R=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $l=a$.

Намираме:

$$\frac{S_{\text{сфера}}}{S_{\text{конус}}}=\frac{4\pi R^2}{\pi r(r+l)}=\frac{4a^2.3}{36}.\frac{1}{\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}+a\right)}=\frac{4a^2.3}{36}.\frac{4}{3a^2}=\frac{4}{9},$$

$$\frac{V_{\text{сфера}}}{V_{\text{конус}}}=\frac{4\pi R^3}{3}.\frac{3}{\pi r^2 h}=\frac{4a^3 3\sqrt{3}}{6.36}.\frac{4.2}{a^2.a\sqrt{3}}=\frac{4}{9}.$$

20. Нека ΔABC е осно сечение на конуса с вписана окръжност с радиус R, която е голяма окръжност на сферата.



Означаваме $AM=r$, $KO_1=r_1$, $CA=l$, $CK=l_1$ (виж чертежа) и $\angle BAC=\alpha$.

По условие $S_{\text{сфера}}=S_{\text{основа}}$

$\Rightarrow\ 4\pi R^2=\pi r^2 \ \Rightarrow\ r=2R \ \Rightarrow\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$ (от ΔAMO).

От $\Delta KO_1C \sim \Delta AMC \ \Rightarrow\ \frac{l_1}{l}=\frac{r_1}{r}$.

Нека S' е околната повърхнина на конуса над окръжността на допирането на сферата с дадения конус. Трябва да намерим $\frac{S'}{S}$.

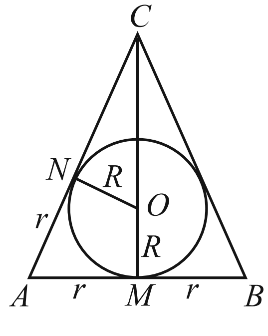
Имаме $\frac{S'}{S}=\frac{\pi r_1 l_1}{\pi r l}=\frac{r_1}{r}.\frac{r_1}{r}=\left(\frac{r_1}{r}\right)^2=\left(\frac{r_1}{2R}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\frac{r_1}{R}\right)^2$.

От ΔKOO_1: $\frac{r_1}{R}=\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2.\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{4}{5}$. (Използвали сме универсалната субституция.)

$\Rightarrow \frac{S'}{S}=\frac{1}{4}\left(\frac{r_1}{R}\right)^2=\frac{1}{4}.\frac{16}{25}=\frac{4}{25}$.

21. $S_{\text{сфера}}=4\pi R^2 \qquad V_{\text{сфера}}=\frac{4}{3}\pi R^3$

$S_{\text{конус}}=\pi r(r+l) \qquad V_{\text{конус}}=\frac{\pi r^2 h}{3}$



Трябва да намерим $\frac{V_{\text{сфера}}}{V_{\text{конус}}}=\frac{4}{3}\frac{\pi R^3}{\frac{\pi r^2 h}{3}}=\frac{4R^3}{r^2 h}$.

По условие $2S_{\text{сфера}}=S_1$, $8\pi R^2=\pi(r^2+rl) \ \Rightarrow\ R^2=\frac{r^2+rl}{8}$.

Искаме да намерим R^3. За целта записваме $R^3 = \dfrac{r^2R + rlR}{8}$.

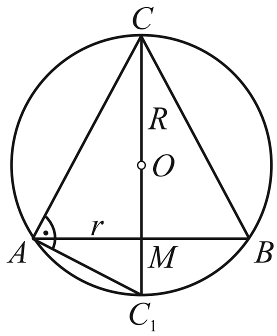
От $\Delta AMC \sim \Delta ONC$ имаме $\dfrac{r}{l} = \dfrac{R}{h-R} \Rightarrow lR = r(h-R)$.

Тогава за R^3 получаваме

$$R^3 = \frac{r^2R + rr(h-R)}{8} = \frac{r^2h}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{\text{сфера}}}{V_{\text{конус}}} = \frac{4R^3}{r^2h} = \frac{4r^2h}{8.r^2h} = \frac{1}{2}.$$

22. $V_{\text{конус}} = \dfrac{1}{4}V_{\text{кълбо}}$, т.е. $\dfrac{1}{3}\pi r^2h = \dfrac{1}{4}\dfrac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow r^2h = R^3$.



От правоъгълния ΔAC_1C: $r^2 = h(2R-h) \Rightarrow r^2h = h^2(2R-h)$,

т.е. $R^3 = h^2(2R-h)$ или $R^3 - 2h^2R + h^3 = 0$.

Полагаме $\dfrac{R}{h} = x \Rightarrow x^3 - 2x + 1 = 0$.

Очевидно $x_1 = 1$ е корен

$\Rightarrow (x-1)(x^2 - x - 1) = 0$, $x_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

За R получаваме: $\dfrac{R}{h} = 1 \Rightarrow R = h$ или $\dfrac{R}{h} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow R = \dfrac{h(\sqrt{5}-1)}{2}$.

1 случай. $R = h$. Тогава $O \in AB$ и обемът на кълбото се намира непосредствено:

$V_{\text{кълбо}} = \dfrac{4}{3}\pi h^3$.

2 случай. $R = \dfrac{h(\sqrt{5}-1)}{2}$

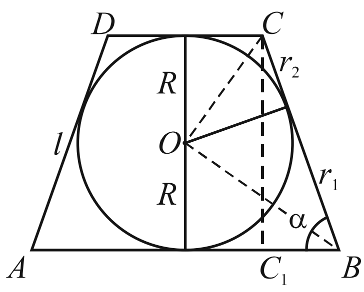
$$\Rightarrow R^3 = \left(\frac{h(\sqrt{5}-1)}{2}\right)^3 = \frac{h^3(5\sqrt{5} - 3.5 + 3\sqrt{5} - 1)}{8} = h^3(\sqrt{5}-2).$$

За обема на кълбото получаваме $V_{\text{кълбо}} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4}{3}\pi(\sqrt{5}-2)h^3$.

23. Нека радиусите на пресечения конус са r_1 и r_2, $r_1 > r_2$ и l е образуващата.

Осното сечение на пресечения конус е равнобедрен трапец, в който е вписана голяма окръжност на сферата, която е с радиус R. Тогава (виж чертежа) $l = r_1 + r_2$, и от ΔC_1BC:

$$l = r_1 + r_2 = \frac{2R}{\sin\alpha}.$$



Тъй като BO и CO са ъглополовящи съответно на $\angle ABC$ и $\angle BCD$, то $\angle BOC = 90°$ и от метричните зависимости в правоъгълния ΔBOC намираме

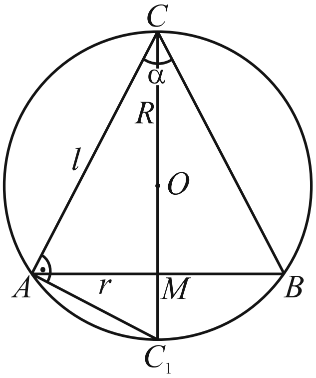
$$R^2 = r_1r_2.$$

За пълната повърхнина последователно получаваме:

$$S_1=\pi l(r_1+r_2)+\pi r_1^2+\pi r_2^2 = \pi\left[(r_1+r_2)^2+r_1^2+r_2^2+2r_1r_2-2r_1r_2\right] = \pi\left[2(r_1+r_2)^2-2r_1r_2\right] =$$

$$=\pi\left(2.\frac{4R^2}{\sin^2\alpha}-2R^2\right)=\frac{2\pi R^2(4-\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha}.$$

24. Ще изразим радиуса на конуса r чрез образуващата му l.



Изразяваме лицето на правоъгълния ΔCAC_1 по два начина:

$AC.AC_1=CC_1.AM$ или $l.\sqrt{4R^2-l^2}=2R.r$

$\Rightarrow\ r=\dfrac{l\sqrt{4R^2-l^2}}{2R}$, $l\in(0,2R)$.

Следователно $S(l)=\pi rl=\dfrac{\pi}{2R}l^2\sqrt{4R^2-l^2}$, $l\in(0,2R)$.

Намираме най-голямата стойност на $S(l)$ в $(0,2R)$.

$$S'(l)=\frac{\pi}{2R}\left(2l\sqrt{4R^2-l^2}+l^2.\frac{-2l}{2\sqrt{4R^2-l^2}}\right)=\frac{\pi}{2R}\frac{4l(4R^2-l^2)-2l^3}{2\sqrt{4R^2-l^2}}=\frac{\pi}{2R}\frac{8R^2l-3l^3}{\sqrt{4R^2-l^2}}.$$

Решаваме уравнението $S'(l)=0$.

$l(8R^2-3l^2)=0$, $l_1=0$, $l_{2,3}=\pm\dfrac{2\sqrt{6}R}{3}$.

В интервала $(0,2R)$ $S'(l)$ има единствен корен $l=\dfrac{2\sqrt{6}R}{3}$ и $S(l)$ има локален максимум при $l=\dfrac{2\sqrt{6}R}{3}$ $\Rightarrow \max\limits_{(0,2R)}S(l)=S_{\max}=S(\dfrac{2\sqrt{6}R}{3})$.

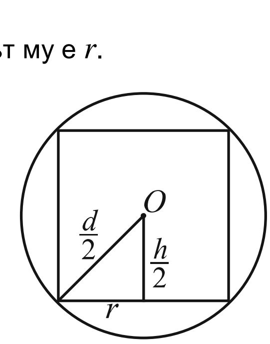
За този конус намираме:

$$r=\frac{2\sqrt{6}R\sqrt{4R^2-\frac{8}{3}R^2}}{2R.3}=\frac{\sqrt{6}}{3}\frac{2R}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}R}{3}.$$

а) $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{r}{l}=\dfrac{2\sqrt{2}R.3}{3.2\sqrt{6}\mathrm{R}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\alpha=1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$.

б) $S=\pi rl=\pi\dfrac{2\sqrt{2}R}{3}\dfrac{2\sqrt{6}R}{3}=\dfrac{8\sqrt{3}}{9}\pi R^2$.

25. Образуващата на цилиндъра е равна на височината, $l=h$ и нека радиусът му е r.



$r^2=\dfrac{d^2}{4}-\dfrac{h^2}{4}=\dfrac{1}{4}(d^2-h^2)$.

$S(h)=2\pi rl=2\pi rh=\dfrac{2\pi}{2}\sqrt{d^2-h^2}\,h=\pi h\sqrt{d^2-h^2}$, $h\in(0,d)$.

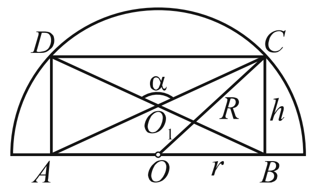
$$S'(h)=\pi\sqrt{d^2-h^2}+\frac{\pi h(-2h)}{2\sqrt{d^2-h^2}}=\pi\frac{d^2-2h^2}{\sqrt{d^2-h^2}}=0.$$

В $(0,d)$ производната има единствен корен $h=\dfrac{d}{\sqrt{2}}$ и в тази точка производната си сменя знака от + на – $\Rightarrow$ $S(h)$ има локален максимум $\Rightarrow$ $\max\limits_{(0,d)} S(h)=S_{\max}=S(\dfrac{d}{\sqrt{2}})$.

Получихме, че цилиндърът с най-голяма околна повърхнина има височина $h=\dfrac{d}{\sqrt{2}}$ и следователно осното му сечение е квадрат.

Обемът на този цилиндър е $V=\pi r^2 h = \dfrac{\pi}{4}(d^2-\dfrac{d^2}{2})\dfrac{d}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{16}\pi d^3$.

26. Нека осното сечение на цилиндъра е $ABCD$, $AC\cap BD=O_1$, точка O е център на полусферата, радиусът на цилиндъра е $AO=BO=r$, височината му е $CB=h$ и $\angle CO_1D=\alpha$.



От ΔOBC: $h=\sqrt{R^2-r^2}$.

Ще намерим за коя стойност на r обемът на цилиндъра V е най-голям.

$V(r)=\pi r^2 h=\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}$, $r\in(0,R)$.

$$V'(r)=\pi\left(2r\sqrt{R^2-r^2}-\frac{r^2 2r}{2\sqrt{R^2-r^2}}\right)=\pi\frac{r(2R^2-3r^2)}{\sqrt{R^2-r^2}}=0,$$

$r_1=0$, $r_{2,3}=\pm\dfrac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

$V'(r)=0$ има единствен корен $r=\dfrac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ в $(0,R)$ и при $r=\dfrac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ си сменя знака от + на – .

Следователно $V(r)$ има локален максимум $\Rightarrow$ $\max\limits_{(0,R)} V(r)=V_{\max}=V(\dfrac{R\sqrt{2}}{\sqrt{3}})$. За този цилиндър намираме:

$$h^2=R^2-r^2=R^2-\frac{2R^2}{3}=\frac{R^2}{3}\Rightarrow h=\frac{R}{\sqrt{3}}\Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{2r}{h}=2\sqrt{2}.$$

Прилагаме универсалната субституция и получаваме $\cos\alpha=-\dfrac{7}{9}$.

При $\cos\alpha=-\dfrac{7}{9}$ обемът на цилиндъра е най-голям.

Ако $\angle BO_1C=\alpha$, $\cos\alpha=\dfrac{7}{9}$.