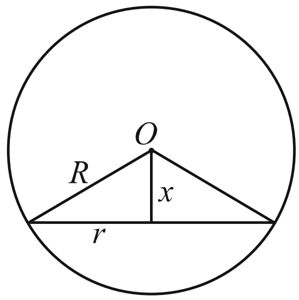
2.2. Екстремални задачи в пространството

3. Нека r е радиусът на конуса.

Имаме $r^2 = R^2 - x^2$, където x е разстоянието от сечението до центъра на кълбото. Обемът на конуса е



$$V(x) = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi(R^2 - x^2)\,x}{3} = \frac{\pi}{3}(R^2 x - x^3),\ x \in (0, R).$$

$V'(x) = \frac{\pi}{3}(R^2 - 3x^2) = 0$ има единствен корен $x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ в интервала $(0, R)$, около който си сменя знака от + на $- \Rightarrow V(x)$ има локален максимум.

Конусът има най-голям обем $\max\limits_{(0,R)} V(x) = V\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{27}$, когато разстоянието е $x = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

Когато x се изменя от 0 до $\frac{R\sqrt{3}}{3}$, обемът на конуса расте от 0 до $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{27}$.

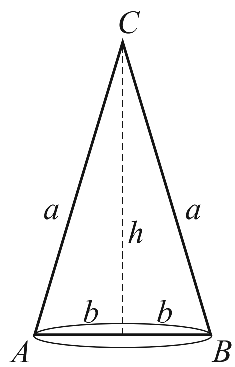
Когато x се изменя от $\frac{R\sqrt{3}}{3}$ до R, обемът на конуса намалява от $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}\pi R^3}{27}$ до 0,

4. Нека даденият триъгълник е ΔABC и $AB = 2b$, $AC = BC = a$.

Тогава $2a + 2b = 2p \Rightarrow a + b = p$.

Полученото тяло е конус.

Нека $b = x$, тогава $a = p - x$. Имаме



$$h = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(p-x)^2 - x^2} = \sqrt{p^2 - 2px},$$

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi b^2 h = \frac{\pi}{3} x^2 \sqrt{p^2 - 2px},\ x \in \left(0, \frac{p}{2}\right)$$

$$V'(x) = \frac{\pi}{3} 2x\sqrt{p^2 - 2px} + \frac{\pi\, x^2(-2p)}{3.2\sqrt{p^2 - 2px}} =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{x(p^2 - 2px) - px^2}{\sqrt{p^2 - 2px}} =$$

$$= \frac{\pi}{3} \cdot \frac{2p^2 x - 5px^2}{\sqrt{p^2 - 2px}} =$$

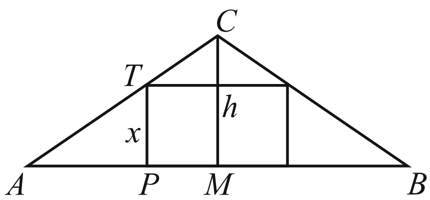
$$= \frac{\pi\, px(2p - 5x}{3\sqrt{p^2 - 2px}}.$$

$V'(x) = \frac{\pi\, px(2p - 5x)}{3\sqrt{p^2 - 2px}} = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{2p}{5}$, като $x = \frac{2p}{5}$ е единствен корен в интервала $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ и $V'(x)$ си сменя знака от + на $- \Rightarrow V(x)$ има локален максимум $\Rightarrow \max\limits_{(0, \frac{p}{2})} V(x) = V\left(\frac{2p}{5}\right)$.

За страните на триъгълника получаваме:

$$AB = 2b = \frac{4p}{5} \quad \text{и} \quad AC = a = p - x = p - \frac{2p}{5} = \frac{3p}{5}.$$

5. За конуса имаме $h=\frac{1}{3}d$ или $d=3h$, $AM=\frac{3h}{2}$.



Нека височината на цилиндъра е $TP=x$, $x\in(0,h)$.

$\Delta APT\sim\Delta AMC \quad\Rightarrow\quad \frac{x}{h}=\frac{AP}{AM}$

$\Rightarrow\quad AP=\frac{AM\,x}{h}=\frac{3hx}{2h}=\frac{3x}{2}$.

Тогава радиусът PM на цилиндъра е $PM=AM-AP=\frac{3h}{2}-\frac{3x}{2}=\frac{3}{2}(h-x)$.

За обема на цилиндъра намираме:

$V(x)=\pi PM^2x=\pi\frac{9}{4}(h-x)^2x=\frac{9\pi}{4}(x^3-2hx^2+h^2x)$, $x\in(0,h)$.

$V'(x)=\frac{9\pi}{4}(3x^2-4hx+h^2)=\frac{9\pi}{4}(3x-h)(x-h)=0$, $x_1=\frac{h}{3}$, $x_2=h$.

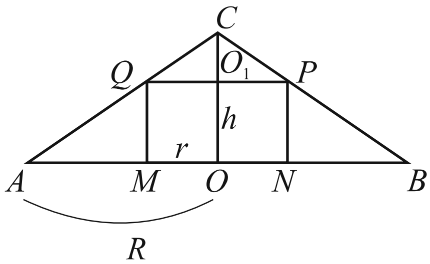
В интервала $(0,h)$ $V'(x)$ има единствен корен $x=\frac{h}{3}$, около който си сменя знака от + на –
$\Rightarrow$ $V(x)$ има локален максимум и приема най-голямата си стойност при $x=\frac{h}{3}$.

Тогава $PM=\frac{3}{2}(h-x)=h$ $\Rightarrow$ диагоналното сечение на цилиндъра е правоъгълник с размери $\frac{h}{3}$ и $2h$ и нека φ е острият ъгъл между диагоналите.

Тогава $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{\frac{h}{6}}{h}=\frac{1}{6}$, откъдето намираме $\operatorname{tg}\varphi=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}=\frac{12}{35}$.

6. Нека $OM=r$ и $OO_1=h$ са радиусът и височината на цилиндъра.

От $\Delta QO_1C\sim\Delta AOC$ имаме $\frac{r}{R}=\frac{H-h}{H} \quad\Rightarrow\quad r=\frac{R(H-h)}{H}$.



Обемът на цилиндъра е

$V(h)=\pi r^2h=\frac{\pi R^2(H-h)^2h}{H^2}$

$V(h)=\frac{\pi R^2}{H^2}(h^3-2Hh^2+H^2h)$, $h\in(0,H)$

$V'(h)=\frac{\pi R^2}{H^2}\left(3h^2-4Hh+H^2\right)=0$

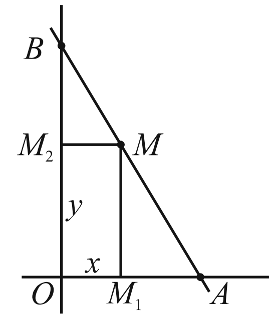
Корените на производната са $h_1=\frac{H}{3}\in(0,H)$ и $h_2=H\notin(0,H)$.

Производната си сменя знака около $h=\frac{H}{3}$ от + на – $\Rightarrow$ $V(h)$ има локален максимум и достига най-голямата си стойност в него $\Rightarrow$ $\max\limits_{(0,H)}V(h)=V_{\max}=V(\frac{H}{3})$.

Радиусът и обемът на цилиндъра с най-голям обем са:

$r=\frac{R(H-h)}{H}=\frac{R(H-\frac{H}{3})}{H}=\frac{2}{3}R$ и $V=\pi\frac{4}{9}R^2\frac{H}{3}=\frac{4}{27}\pi R^2H$.

7.



Полученото ротационно тяло е прав кръгов цилиндър с радиус $OM_1 = x$ и височина $OM_2 = y \;\Rightarrow\; V = \pi x^2 y$.

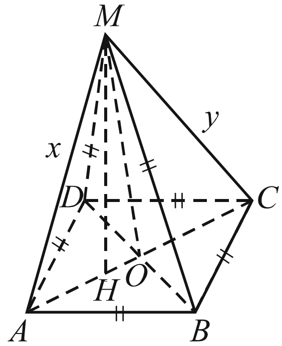
От $\Delta M_1AM \sim \Delta OAB \;\Rightarrow\; \dfrac{3-x}{3} = \dfrac{y}{5} \;\Rightarrow\; y = \dfrac{5}{3}(3-x)$.

$V(x) = \dfrac{5\pi}{3}x^2(3-x) = \dfrac{5\pi}{3}(3x^2 - x^3)$, $x \in (0,3)$.

$V'(x) = \dfrac{5\pi}{3}(6x - 3x^2) = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ Единственият корен на производната в $(0,3)$ е $x = 2$ и в него функцията има локален максимум.

$\Rightarrow \max\limits_{(0,3)} V(x) = V_{\max} = V(2)$, при $x = 2$, $y = \dfrac{5}{3} \;\Rightarrow\; V_{\max} \dfrac{20\pi}{3}$.

8 Дължините на околните ръбове MA и MC на пирамидата $ABCDM$ (M – връх) са различни от 1, а дължините на всички останали са равни на 1. При какви дължини на MA и MC обемът на пирамидата е най-голям? Намерете този обем.



8 Нека $MA = x$, ($x > 0$), $MC = y$, ($y > 0$) и $AB = BC = CD = DA = MB = MD = 1$.

Основата $ABCD$ е ромб.

Нека MH е височината на пирамидата $\Rightarrow$ $BH = DH$ (като проекции на равни наклонени) $\Rightarrow$ $H \in s_{BD} \;\Rightarrow\; H \in AC$.

Ако O е пресечната точка на диагоналите на ромба $ABCD$, то MO и AO са медиани в еднаквите равнобедрени триъгълници MBD и ABD $\Rightarrow$ $MO = AO$ $\Rightarrow$ медианата MO в ΔACM е равна на $\dfrac{1}{2}AC$ $\Rightarrow$ $\angle AMC = 90^\circ$.

Променливите x и y се изменят в интервала $(0,1) \cup (1,2)$, защото $AC < AB + BC = 2$, т.е. $AC < 2$, а x и y са катети в ΔACM.

Обемът V на дадената пирамида е два пъти по-голям от обема на триъгълната пирамида $ACMB$ с връх B, т.е.

$$V = 2.\frac{1}{3}V_{ACMB} = 2.\frac{1}{3}\frac{1}{2}AM.MC.OB = \frac{1}{3}xy.OB.$$

Остава да се изрази OB чрез x и y.

ΔACM – правоъгълен, $AC^2 = x^2 + y^2$.

$$MO^2 = \frac{1}{4}AC^2 = \frac{x^2 + y^2}{4}.$$

Проекцията на MO в основата е AC и $AC \perp BO$, тогава от теоремата за трите перпендикуляра получаваме, че $MO \perp BO \;\Rightarrow\; \Delta MOB$ е правоъгълен.

$$\Rightarrow OB = \sqrt{MB^2 - MO^2} = \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{4}} = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2}.$$

Следователно $V = \frac{1}{6} xy\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ или $36V^2 = x^2 y^2 (4 - x^2 - y^2)$.

За намиране на максималния обем, ще използваме неравенството между средноаритметично и средногеометрично.

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ или $abc \leq (\frac{a+b+c}{3})^3$, $a,b,c > 0$.

Прилагаме неравенството за числата x^2, y^2 и $4 - x^2 - y^2$. Получаваме:

$$36V^2 = x^2 y^2 (4 - x^2 - y^2) \leq \frac{(x^2 + y^2 + 4 - x^2 - y^2)^3}{27} \leq \frac{64}{27}.$$

Равенство се достига при $x^2 = y^2 = (4 - x^2 - y^2)$ или при $x = y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$; $-\frac{2}{\sqrt{3}} \notin (0,1) \cup (1,2)$.

Обемът е максимален при $x = y = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

За максималния обем имаме $36V^2 = \frac{64}{27} \Rightarrow V^2 = \frac{64}{27.36} = \frac{16}{27.9}$, $V = \frac{4\sqrt{3}}{27}$.