2.1. Екстремални задачи в равнината

4. Както в зад. 3. намираме, че

$$p = r(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2})$$

$\Rightarrow \; S = pr = r^2(\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2})$ и $\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} \geq 3\sqrt{3}$

$\Rightarrow \; S \geq 3\sqrt{3}r^2$

От всички триъгълници, описани около окръжност с радиус r най-малко лице има равностранният триъгълник и лицето му е $S = 3\sqrt{3}r^2$.

5. Както в задача 2. намираме, че

$$p = \frac{P}{2} = \frac{2r}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

$\Rightarrow \; S = S(\alpha) = pr = \dfrac{2r^2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}}$ и решението може да следва решението на задача 2.

Но тук ще покажем друго решение, като приложим методите, използвани в задачи 37 и 36, страница 50.

Полагаме $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = x$, $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}) \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \in (0,1)$, т.е. $x \in (0,1)$.

Тогава най-малката стойност на $S(\alpha)$ в интервала $(0, \frac{\pi}{2})$ ще бъде равна на най-малката стойност на функцията $f(x) = \dfrac{2r^2}{x - x^3}$ в интервала $(0,1)$.

Да означим $g(x) = x - x^3$, $x \in (0,1)$.

Тъй като $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ в $(0,1)$, то $f(x)$ ще приеме най-малката си стойност за тези x, за които $g(x)$ приема най-голямата си стойност в $(0,1)$.

$$g'(x) = 1 - 3x^2 = 0, \quad x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$\Rightarrow \; x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ е единствен корен в $(0,1)$ и около него производната си сменя знака от + на – $\Rightarrow$ $g(x)$ има локален максимум.

$$\Rightarrow \max_{(0,1)} g(x) = g(\frac{\sqrt{3}}{3})$$

$$\Rightarrow \min_{(0,1)} f(x) = f(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{2r^2}{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}} = 3\sqrt{3}\,r^2.$$

$\Rightarrow \min\limits_{(0,\frac{\pi}{2})} S(\alpha) = 3\sqrt{3}\,r^2$ и $\operatorname{tg}\alpha = x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\alpha = 60^\circ$.

Следователно от всички равнобедрени триъгълници, описани около окръжност с радиус r, равностранният триъгълник има най-малко лице.

6. Нека α е ъгълът при основата на равнобедрения триъгълник.

Тогава $b = 2R\sin\alpha$, $c = 2b\sin\alpha = 4R\cos\alpha\cos\alpha$.

$\Rightarrow S(\alpha) = \dfrac{abc}{4R} = \dfrac{4R^2\sin^2\alpha 4R\sin\alpha\cos\alpha}{4R} = 4R^2\sin^3\alpha\cos\alpha$, $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{2})$.

$S'(\alpha) = 4R^2(3\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^4\alpha) =$

$= 4R^2\sin^2\alpha(3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) =$

$= 4R^2\sin^2\alpha(4\cos^2\alpha - 1) = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\dfrac{1}{2}$

При $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$, $\alpha \notin (0, \dfrac{\pi}{2})$.

При $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\alpha = 60° = \dfrac{\pi}{3} \in (0, \dfrac{\pi}{2}) \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{3}$ е единствен корен на производната в $(0, \dfrac{\pi}{2})$.

Намираме $S'' = 4R^2 2\sin\alpha\cos\alpha(4\cos^2\alpha - 1) + 4R^2\sin^2\alpha(-8\cos\alpha\sin\alpha)$.

Пресмятаме $S''(\dfrac{\pi}{3}) = 0 + 4R^2\sin^2\alpha\left(-8.\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$

$\Rightarrow S(\alpha)$ има локален максимум при $\alpha = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \max\limits_{(0,\frac{\pi}{2})} S(\alpha) = S(\dfrac{\pi}{3}) = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

Триъгълникът е равностранен.

7. В равенството $a + b - c = 2r$ заместваме $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\cos\alpha$, $c = 2R$ и получаваме $2R\sin\alpha + 2R\cos\alpha - 2R = 2r \Rightarrow \dfrac{r}{R} = \sin\alpha + \cos\alpha - 1$.

Нека $f(\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha - 1$, $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{2})$.

Намираме $f'(\alpha) = \cos\alpha - \sin\alpha = 0$.

В интервала $(0, \dfrac{\pi}{2})$ горното уравнение има единствен корен $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Намираме $f''(\alpha) = -\sin\alpha - \cos\alpha \Rightarrow f''(\dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} < 0$

$\Rightarrow f(\alpha)$ има локален максимум при $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

$\Rightarrow \max\limits_{(0,\frac{\pi}{2})} f(\alpha) = f(\dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$.

Окончателно най-голямата стойност на отношението $\dfrac{r}{R}$ е $\dfrac{r}{R} = \sqrt{2} - 1$ и се достига при $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

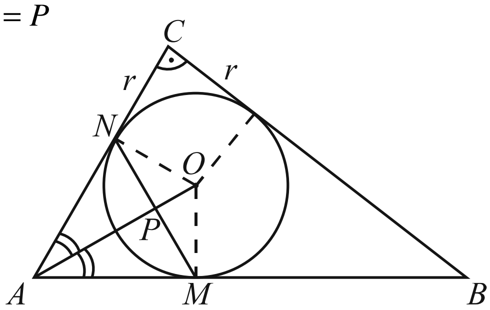
<u>Коментар.</u> Задачата може да решим и без производни.

Имаме $\dfrac{r}{R} = \sin\alpha + \cos\alpha - 1 = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) - 1$.

Тъй като $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) \le 1$, то $\dfrac{r}{R} \le \sqrt{2} - 1$, като равенството се достига само при $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

$\Rightarrow$ най-голямата стойност на отношението $\dfrac{r}{R}$ е $\dfrac{r}{R} = \sqrt{2} - 1$ и се достига при $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

8. Нека O е центърът на вписаната окръжност и $MN \cap AO = P$



а) $AB = 1$, $AC = \cos\alpha$, $BC = \sin\alpha$.

От равенството $a + b - c = 2r$ получаваме

$r = \dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha - 1}{2}$.

$\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$

$CN = r$

$\Rightarrow\ AM = AN = AC - CN = \cos\alpha - r = \frac{1}{2}(1 + \cos\alpha - \sin\alpha)$.

$\dfrac{MN}{2} = MP = NP = AM \sin\dfrac{\alpha}{2}$.

$MN = 2AM \sin\dfrac{\alpha}{2} = \sin\dfrac{\alpha}{2}.(1 + \cos\alpha - \sin\alpha) =$

$= \sin\dfrac{\alpha}{2}.\left(2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\right) =$ $\qquad \alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$

$= 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}.\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right) =$ $\qquad \Rightarrow\ 0 < \dfrac{\alpha}{2} < \dfrac{\pi}{4}$

$= \sin\alpha.\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right) =$ $\qquad \Rightarrow\ 0 > -\dfrac{\alpha}{2} > -\dfrac{\pi}{4}$

$= \sqrt{2}\sin\alpha\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right) =$ $\qquad \Rightarrow\ \dfrac{\pi}{4} > \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2} > 0$

$= \sqrt{2}\sin\alpha\sqrt{\dfrac{1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}{2}} =$ $\qquad \Rightarrow\ \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = +\sqrt{\dfrac{1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}{2}}$

$= \sin\alpha\sqrt{1 - \cos\alpha} =$

$= \sqrt{\sin^2\alpha(1 - \sin\alpha)} =$

$= \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^3\alpha}$.

б) Разглеждаме $\varphi(\alpha) = \sin^2\alpha - \sin^3\alpha$ за $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$

Намираме:

$\varphi'(\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = \sin\alpha\cos\alpha(2 - 3\sin\alpha)$, $\sin\alpha \neq 0$, $\cos\alpha \neq 0$

$\Rightarrow\ 2 - 3\sin\alpha = 0$, $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$.

$\Rightarrow\ \varphi'(\alpha) = 0$ има единствен корен в интервала $(0, \frac{\pi}{2})$ при $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$.

Намираме:

$\varphi''(\alpha) = 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha - 6\sin\alpha\cos^2\alpha + 3\sin^3\alpha$

Ще преобразуваме израза за $\varphi''(\alpha)$, така че да участва само тригонометричната функция $\sin\alpha$.

$\varphi''(\alpha) = 2(1-\sin^2\alpha) - 2\sin^2\alpha - 6\sin\alpha(1-\sin^2\alpha) + 3\sin^3\alpha$,

$\varphi'' = 2 - 4\sin^2\alpha - 6\sin\alpha + 9\sin^3\alpha$

Сега при $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$ имаме $\varphi''(\alpha) = 2 - 4.\dfrac{4}{9} - 6.\dfrac{2}{3} + 9.\dfrac{8}{27} = -2 + \dfrac{8}{9} < 0$.

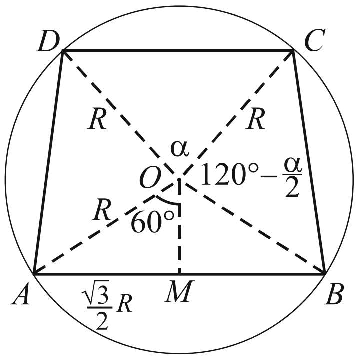
Следователно φ има локален максимум при $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$.

$\Rightarrow \max\limits_{(0,\frac{\pi}{2})} \varphi(\alpha) = \sqrt{\dfrac{4}{9} - \dfrac{8}{27}} = \sqrt{\dfrac{4}{27}} = \dfrac{2}{3\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

$\Rightarrow$ най-голямата стойност на отсечката MN е $MN = \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow MN \le \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

9. Трапецът е равнобедрен, тъй като е вписан в окръжност.

Нека $ABCD$ е равнобедрен трапец, $AB \parallel CD$, $AB = R\sqrt{3}$.



Нека M е средата на $AB \Rightarrow AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R$.

От ΔAMO имаме $\sin\angle AOM = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle AOM = 60^\circ$ и $\overset{\frown}{AB} = 120^\circ$. Означаваме $\angle DOC = \alpha$.

$\angle DOC$ е измерва с по-малката прилежаща дъга на отсечката CD и тъй като $CD < 2R$ (O е вътре в трапеца), то $0 < \alpha < \pi$.

Лицето на трапеца е

$S = S_{DOC} + S_{AOB} + 2S_{AOD}$,

$S = \dfrac{1}{2}R^2\sin\alpha + \dfrac{1}{2}R^2\sin\dfrac{2\pi}{3} + 2.\dfrac{1}{2}R^2\sin\left(\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$,

$S(\alpha) = \dfrac{1}{2}R^2\left(\sin\alpha + \sin\dfrac{2\pi}{3} + 2\sin\left(\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\alpha}{2}\right)\right)$. Търсим най-голямата стойност на функцията $S(\alpha)$ при $0 < \alpha < \pi$.

$S'(\alpha) = \dfrac{1}{2}R^2\left(\cos\alpha - \cos\left(\dfrac{2\pi}{3} - \dfrac{\alpha}{2}\right)\right)$. (Използвали сме, че $\left(\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)' = 0$.)

Преобразуваме $S'(\alpha)$ във вид на произведение.

$S'(\alpha) = \dfrac{1}{2}R^2(-2)\sin\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3\alpha}{2} - \dfrac{2\pi}{3}\right)\right)\sin\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$

$S'(\alpha) = R^2\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{3\alpha}{4}\right)\sin\left(\dfrac{\alpha}{4} + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$.

Решенията на последното уравнение са тези α, за които поне един от синусите е равен на 0. Имаме:

$\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{3\alpha}{4}\right) = 0$, $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{3\alpha}{4} = k\pi$, $k = 0, \pm1, \dots$, $\alpha = \dfrac{4}{3}\left(\dfrac{\pi}{3} - k\pi\right)$.

Единственият корен в интервала $(0,\pi)$ е $\alpha = \dfrac{4\pi}{9} = 80^\circ$, при $k = 0$.

или $\sin\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{3}\right)=0$, $\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{3}=k\pi$, $k=0,\pm1,\ldots$, $\alpha=4\left(k\pi-\frac{\pi}{3}\right)\notin(0,\pi)$ за $k=0,\pm1,\ldots$.

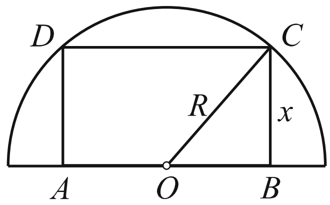
Ще изследваме критичната точка $\alpha=\frac{4\pi}{9}=80^\circ$ с втора производна.

$S''(\alpha)=\frac{1}{2}R^2\left(\cos\alpha-\cos\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)'=\frac{R^2}{2}\left(-\sin\alpha-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)$.

$S''\left(\frac{4\pi}{9}\right)=\frac{R^2}{2}\left(-\sin\frac{4\pi}{9}-\frac{1}{2}\sin 0\right)<0 \Rightarrow S(\alpha)$ има локален максимум при $\alpha=\frac{4\pi}{9}=80^\circ$ и следователно лицето на трапеца е най-голямо при $\alpha=\frac{4\pi}{9}=80^\circ$.

В този случай $\angle AOD=80^\circ \Rightarrow \Delta AOD\cong\Delta DOC \Rightarrow$ бедрото на трапеца с най-голямо лице е равно на малката основа и дължината му е равна на $2R\sin\frac{2\pi}{9}=2R\sin 40^\circ$.

10. Нека $BC=x$. От ΔOBC $OB=\sqrt{R^2-x^2}$, $AB=2\sqrt{R^2-x^2}$.



$S(x)=2x\sqrt{R^2-x^2}$ $x\in(0,R)$.

Намираме $S'(x)=\frac{2(R^2-2x^2)}{\sqrt{R^2-x^2}}=0$, $x=\pm\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Единственият корен на производната в интервала $(0,R)$ е $x=\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

$S'(x)$ си сменя знака от + на − около $x=\frac{R\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S(x)$ има локален максимум $\Rightarrow$ $\max\limits_{(0,R)}S(x)=S(\frac{R\sqrt{2}}{2})=R^2$.

Имаме: $BC=x=\frac{R\sqrt{2}}{2}$, $AB=2\sqrt{R^2-x^2}=R\sqrt{2}=2BC$. Следователно $ABCD$ е такъв, че $AB=2BC$ и $S=R^2$.

<u>Второ решение</u>. Нека $\angle BOC=\alpha$, $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$.

От ΔOBC намираме $BC=R\sin\alpha$, $OB=R\cos\alpha \Rightarrow AB=2R\cos\alpha$.

За лицето на правоъгълника получаваме $S=AB.BC=2R\cos\alpha\, R\sin\alpha=R^2\sin 2\alpha$.

Тъй като $\sin 2\alpha\le 1$, то $S=R^2\sin 2\alpha\le R^2$.

Равенството се достига при $\sin 2\alpha=1$, $2\alpha=(4k+1)\frac{\pi}{2}$, $k=0,\pm1,\ldots$ или $\alpha=(4k+1)\frac{\pi}{4}$.

Тъй като $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$, то $\alpha=\frac{\pi}{4} \Rightarrow$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$ се получава най-голямото лице и $S=R^2$.

В този случай $OB=BC \Rightarrow AB=2BC$ и $S=R^2$.

11. Имаме $ab = S$. Нека $a = x$, тогава $b = \dfrac{S}{x} \;\Rightarrow\; P(x) = x + \dfrac{S}{x},\; x > 0$.

Намираме $P'(x) = 1 - \dfrac{S}{x^2} = \dfrac{x^2 - S}{x^2} = 0,\;\; x = \pm\sqrt{S} \;\;\Rightarrow\;\; x = \sqrt{S}$ е единственият положителен корен на производната.

Тъй като $P'(x)$ си сменя знака от $-$ на $+$ при $x = \sqrt{S} \;\Rightarrow\; P(x)$ има локален минимум $\Rightarrow$ $\min\limits_{(0,\,\infty)} P(x) = P(\sqrt{S}) = 2\sqrt{S}$, $a = \sqrt{S}$, $b = \dfrac{S}{\sqrt{S}} = \sqrt{S}$.

Правоъгълникът с най-малко лице е квадрат със страна $\sqrt{S}$ и периметър $4\sqrt{S}$.

12. Центърът на окръжността е пресечната точка на диагоналите на правоъгълника и ако страните му са x и y, то $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$.

Тогава $S(x) = x\sqrt{4R^2 - x^2}$, $x \in (0, 2R)$.

Намираме $S'(x) = \sqrt{4R^2 - x^2} + x\dfrac{-2x}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = \dfrac{2(4R^2 - x^2) - 2x^2}{2\sqrt{4R^2 - x^2}} = \dfrac{4(2R^2 - x^2)}{2\sqrt{4R^2 - x^2}}$.

$\Rightarrow S'(x) = \dfrac{2(2R^2 - x^2)}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = 0,\quad x_{1,2} = \pm R\sqrt{2},\quad R\sqrt{2} \in (0, 2R)$ и производната си сменя знака от $+$ на $-$ около точката $x = R\sqrt{2}$.

При $x = R\sqrt{2}$, $S(x)$ има локален максимум $\Rightarrow$ $\max\limits_{(0,\,2R)} S(x) = S(R\sqrt{2}) = 2R^2$, $x = R\sqrt{2}$. В този случай $y = R\sqrt{2} \;\Rightarrow$

<u>Второ решение</u>.

Нека диагоналът сключва ъгъл α с една от страните, $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{2})$.

Тъй като центърът на окръжността е пресечната точка на диагоналите на правоъгълника, то диагоналът му е $2R$, а страните са $2R\cos\alpha$ и $2R\sin\alpha$.

$\Rightarrow\;\; S(\alpha) = 4R^2 \sin\alpha\cos\alpha = 2R^2\sin 2\alpha$.

Тъй като $\sin 2\alpha \le 1$, то $S(\alpha) = 2R^2\sin 2\alpha \le 2R^2$.

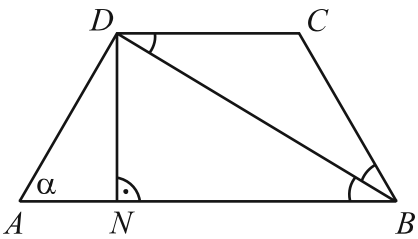
Равенството се достига при $\sin 2\alpha = 1$, $2\alpha = (4k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm1, \dots$ или $\alpha = (4k+1)\dfrac{\pi}{4}$.

Тъй като $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{2})$, то $\alpha = \dfrac{\pi}{4} \;\Rightarrow$ при $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ се получава най-голямото лице и $S = 2R^2$.

В този случай $AB = BC = R\sqrt{2} \;\Rightarrow$ правоъгълникът е квадрат със страна $R\sqrt{2}$ и лице $2R^2$.

13. Да означим $AB = a$, $CD = b = AD = BC = 4$ cm.

От $DC = CB$ следва $\angle BDC = \angle CBD$, а от $DC \parallel AB$ следва $\angle ABD = \angle DBC = \dfrac{\alpha}{2}$.



Нека DN е височината на трапеца.

От ΔAND намираме $DN = b\sin\alpha$ и

$AN = \dfrac{a-b}{2} = b\cos\alpha$, откъдето $a = 2b\cos\alpha + b$.

Следователно $\dfrac{a+b}{2} = b(1+\cos\alpha)$.

За лицето на трапеца получаваме

$$S(\alpha) = \frac{a+b}{2}.DN = b(1+\cos\alpha).b\sin\alpha$$

$S(\alpha) = 16\left(\sin\alpha + \dfrac{\sin 2\alpha}{2}\right)$, $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{2})$, защото $AB > CD$.

Намираме $S'(\alpha) = 16(\cos\alpha + \cos 2\alpha)$

$$S'(\alpha) = 32\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 0.$$

Имаме:

$\cos\dfrac{3\alpha}{2} = 0$, $\dfrac{3\alpha}{2} = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $\alpha = (2k+1)\dfrac{\pi}{3}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ и от $\alpha \in (0, \dfrac{\pi}{2})$ намираме $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$;

или $\cos\dfrac{\alpha}{2} = 0$, $\dfrac{\alpha}{2} = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $\alpha = (2k+1)\pi \notin (0, \dfrac{\pi}{2})$, $k = 0, \pm 1, \ldots$

Окончателно в интервала $(0, \dfrac{\pi}{2})$ производната има единствен корен $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

Изследването за екстремум ще направим с втора производна.

$$S''(\alpha) = 16(\cos\alpha + \cos 2\alpha)' = 16(-\sin\alpha - 2\sin 2\alpha).$$

$S''\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = 16\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - 2\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0 \Rightarrow S(\alpha)$ има локален максимум $\Rightarrow \max\limits_{(0°, 90°)} S(\alpha) = S(\dfrac{\pi}{3}) = 12\sqrt{3}$ cm^2

14. Ще използваме следната формула за лице на триъгълник $S = \dfrac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin\gamma}$.

В конкретния случай имаме:

$$S(x) = \frac{c^2 \sin x \sin(180° - (x+\gamma))}{2\sin\gamma} = \frac{c^2}{2\sin\gamma}\sin x \sin(x+\gamma),\ x \in (0, \pi - \gamma).$$

Намираме $S'(x) = \dfrac{c^2}{2\sin\gamma}(\cos x \sin(x+\gamma) + \sin x \cos(x+\gamma)) = \dfrac{c^2}{2\sin\gamma}\sin(2x+y) = 0$

Корените на уравнението $\sin(2x+\gamma) = 0$ са $2x + \gamma = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, $x = \dfrac{k\pi - \gamma}{2}$.

Тъй като $x \in (0, \pi - \gamma)$, то $0 < x = \dfrac{k\pi - \gamma}{2} < \pi - \gamma$.

Лявото неравенство е изпълнено за всяко $k > 0$.

Да разгледаме $\dfrac{k\pi-\gamma}{2}<\pi-\gamma \ \Leftrightarrow\ \gamma<(2-k)\pi$, което е изпълнено само при $k=1$.

Следователно в интервала $(0,\pi-\gamma)$ производната има единствен корен $x=\dfrac{\pi-\gamma}{2}$.

Намираме $S''(x)=\dfrac{c^2}{2\sin\gamma}\left(\sin(2x+y)\right)'=\dfrac{c^2}{\sin\gamma}\cos(2x+\gamma)$.

$S''\left(\dfrac{\pi-\gamma}{2}\right)=\dfrac{c^2}{\sin\gamma}\cos\pi=-\dfrac{c^2}{\sin\gamma}<0$.

$\Rightarrow S(x)$ има локален максимум при $x=\dfrac{\pi-\gamma}{2}$ и

$$\max_{(0,\pi-\gamma)} S(x)=S\left(\frac{\pi-\gamma}{2}\right)=\frac{c^2}{2\sin\gamma}\sin\frac{\pi-\gamma}{2}\sin\frac{\pi+\gamma}{2}=$$

$$=\frac{c^2}{2\sin\gamma}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)=$$

$$=\frac{c^2}{2\sin\gamma}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=$$

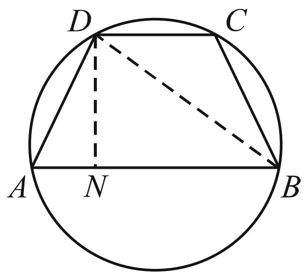
$$=\frac{c^2\cos^2\frac{\gamma}{2}}{2\sin\gamma}.$$

Следователно лицето на триъгълника е най-голямо при $x=\dfrac{\pi-\gamma}{2}$ и $S=\dfrac{c^2\cos^2\frac{\gamma}{2}}{2\sin\gamma}$.

15.

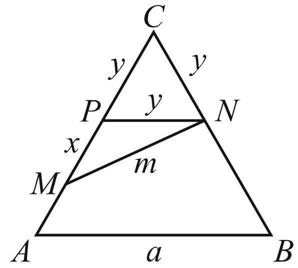
Трапецът е вписан в окръжност, следователно е равнобедрен и $AD=DC=CD=b$.

Тогава задачата съвпада със задача 13 при $b=4$.



По същия начин намираме, че лицето $S(\alpha)=b^2(1+\cos\alpha).\sin\alpha$ приема най-голяма стойност при $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ и $S_{\max}=S(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{3\sqrt{3}b^2}{4}$.

16. Триъгълникът е равностранен.



Нека $MN = m$ е търсената отсечка.

По условие $S_{MNC} = S_{ABNM} = \dfrac{1}{2}S_{ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Построяваме $NP \parallel AB$, $P \in AC$ и нека $NP = y$, $MP = x$.

Ще изразим m като функция на x, $x > 0$.

Изразяваме лицето S на ΔMNP по два начина.

$S = \dfrac{xy\sin 120°}{2} = \dfrac{xy\sqrt{3}}{4}$ и $S = S_{MNC} - S_{PNC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{8} - \dfrac{y^2\sqrt{3}}{4}$. Следователно

(1) $\quad xy = \dfrac{a^2}{2} - y^2$.

От косинусовата теорема за ΔMNC получаваме

$m^2 = (x+y)^2 + y^2 - 2(x+y)y\cos 60° = x^2 + y^2 + xy$. Следователно

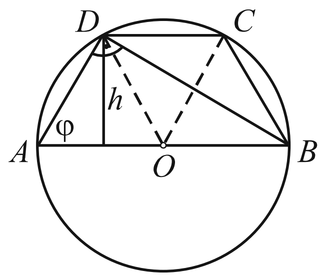
(2) $\quad m^2 = x^2 + y^2 + xy$.

От (1) и (2) намираме $m^2 = x^2 + \dfrac{a^2}{2}$.

Окончателно $m(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{a^2}{2}}$.

Тази функция е положителна и монотонно растяща за всяка стойност на променливата x и най-малката ѝ стойност се достига при $x = 0$. Следователно отсечката MN е успоредна на AB и $m = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

17.



а) От $CD = R$ следва, че ΔCOD е равностранен, т.е. $OD = OC = DC = R$. Следователно и трите триъгълника ΔAOD, ΔOBC и ΔOCD са равностранни и $S = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

б) $AB = 2R$ е диаметър $\Rightarrow \angle ADC = 90°$.

Нека $\angle ABC = \angle BAD = \varphi$ и нека h е височината на трапеца.

От ΔABD последователно намираме.

$AD = 2R\cos\varphi$

$h = AD\sin\varphi = 2R\sin\varphi\cos\varphi = R\sin 2\varphi$.

$\angle ABD = 90° - \varphi \;\Rightarrow\; \angle DBC = 2\varphi - 90°$.

Прилагаме синусовата теорема за ΔDBC: $DC = 2R\sin(2\varphi - 90°) = -2R\cos 2\varphi$

За лицето на трапеца получаваме:

$S(\varphi) = \dfrac{(AB+CD)h}{2} = \dfrac{(2R - 2R\cos 2\varphi)R\sin 2\varphi}{2} = R^2(1 - \cos 3\varphi)\sin 2\varphi$.

Разкриваме скобите, за да намерим по-лесно производната.

$S(\varphi) = R^2(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi \cos 2\varphi)$

$S(\varphi) = R^2(\sin 2\varphi - \frac{1}{2}\sin 4\varphi)$.

Да намерим интервала, в който се изменя ъгъл φ .

φ е остър ъгъл $\Rightarrow$ $\varphi < \frac{\pi}{2}$. Също така $\overset{\frown}{BCD} > \overset{\frown}{AD}$ $\Rightarrow$ $\varphi > 90° - \varphi$, $\varphi > 45° = \frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $\varphi \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Намираме $S'(\varphi) = R^2(2\cos 2\varphi - 2\cos 4\varphi) = 0$.

Решаваме уравнението $\cos 2\varphi - \cos 4\varphi = 0$, $\sin 3\varphi \sin \varphi = 0$.

$\sin \varphi = 0$, $\varphi = k\pi \notin \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$, $k = 0, \pm 1, \dots$.

$\sin 3\varphi = 0$, $3\varphi = k\pi$, $\varphi = \frac{k\pi}{3}$, $k = 0, \pm 1, \dots \Rightarrow$ $\varphi = \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ е единственият корен на производната в интервала $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Намираме $S''(\varphi) = 4R^2(-\sin 2\varphi + 2\sin 4\varphi)$.

$S''(\frac{\pi}{3}) = 4R^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0$.

$\Rightarrow$ $S(\varphi)$ има локален максимум при $\varphi = \frac{\pi}{3}$ и $\max\limits_{(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})} S(\varphi) = S(\frac{\pi}{3}) = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

$\Rightarrow$ лицето на трапеца е най-голямо за $\varphi = 60°$.