Общи задачи
Приложения на математическия анализ – продължение

27. $y=\dfrac{x^3}{3}+mx^2+nx+\dfrac{14}{3}$, дефинирана в $(-\infty,\infty)$.

$y'=x^2+2mx+n$

$y''=2x+2m$

За $x=-1$ функцията има локален максимум, равен на $\dfrac{19}{3}$.

$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} y'(-1)=0 \\ y(-1)=\dfrac{19}{3} \end{array}\right.$ и $y''(-1)<0 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} -2m+n+1=0 \\ m-n-2=0 \end{array}\right.$ и $2m-2<0$

$m=-1$, $n=-3$ и е изпълнено условието $y''(-1)<0$.

Функцията приема вида $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2-3x+\dfrac{14}{3}$.

$y'=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)=0$.

Функцията расте в $(-\infty,-1)$, намалява е $(-1,3)$, расте в $(3,\infty)$.

$y_{\max}=y(-1)=6\dfrac{1}{3}$, $y_{\min}=y(3)=-4\dfrac{1}{3}$.

$y''=2x-2=2(x-1)$.

Функцията е вдлъбната в $(-\infty,-1)$, изпъкнала в $(-1,\infty)$, инфлексна точка $(1,1)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)=\infty$.

28. $f(x)=x^3-(a+1)x^2+(2a-1)x+1$, дефинирана в $(-\infty,\infty)$.

$f'(x)=3x^2-2(a+1)x+(2a-1)$ (1)

Функцията има два локални екстремума точно когато първата производна има два корена около, които си сменя знака, което е изпълнено точно когато квадратният тричлен има положителна дискриминанта.

$D'=(a+1)^2-3(2a-1)=a^2-4a+4=(a-2)^2>0 \quad \Leftrightarrow \quad a\neq 2$.

29. $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{ax^3}{3}-a^2x^2$, дефинирана в $(-\infty,\infty)$.

$f'(x)=x^3+ax^2-2a^2x= x(x-a)(x+2a)=0$.

Корените на производната са a, $-2a$ и 0.

Тъй като по условие $a\neq 0$, то числата a и $-2a$ са противоположни, следователно числото 0 е между тях и тъй като старшият коефициент на производната е $1>0$, то около точките $x=a$ и $x=-2a$ производната си сменя знака от – на +, следователно $f(x)$ има локални минимуми в тези точки.

$\Rightarrow f_{\min}=f(a)=-\dfrac{5a^4}{12}$ и $f_{\min}=f(-2a)=-\dfrac{8a^4}{3}=-\dfrac{32a^4}{12}$.

$\Rightarrow f(a)>f(-2a)$.

По условие $f(a)=-20 \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{5a^4}{12}=-20$, $a^4=48$, $a^4=2^4.3$, $a=\pm 2\sqrt[4]{3}$.

30. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-ax^2-x+1$, дефинирана в $(-\infty,\infty)$.

$f'(x)=x^2-2ax-1$

$f''(x)=2x-2a=2(x-a)=0$, $x=a$.

Втората производна се анулира при $x=a$ и си сменя знака около тази точка $\Rightarrow$ $f(x)$ има инфлексия.

По условие инфлексията е за $x=-\dfrac{1}{3}$, т.е. $a=-\dfrac{1}{3}$.

31. $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-x^2-mx+1$, дефинирана в $(-\infty,\infty)$.

$f'(x)=x^2-2x-m$

Производната е квадратен тричлен със старши коефициент $1>0$ и дискриминанта $D=1+m$.

За $m>-1$, $D>0$, производната има два различни корена, около които си сменя знака $\Rightarrow$ $f(x)$ има два локални екстремума – локален максимум при $x=1-\sqrt{1+m}$ и локален минимум при $x=1+\sqrt{1+m}$.

За $m=-1$, $D=0$ $f'(x)=(x-1)^2>0$, $\forall x\neq 1$.

За $x=1$, $f'(1)=0$, но квадратният тричлен не си сменя знака около тази точка $\Rightarrow$ $f(x)$ няма локален ексремум.

За $m<-1$, $D<0$, производната няма корени $\Rightarrow$ $f(x)$ няма локални екстремуми.

Намираме $f''(x)=2x-2=0$, $x=1$ за всяко m.

Втората производна си сменя знака около точката $x=1$ $\Rightarrow$ $f(x)$ има инфлексна точка с абсциса $x=1$ за всяко m.

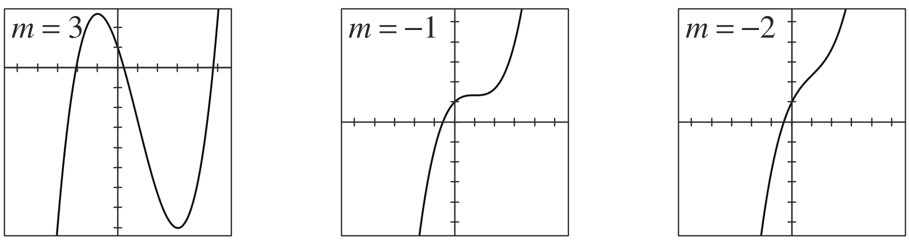
Окончателно:

При $m>-1$ $f(x)$ има локален максимум при $x=1-\sqrt{1+m}$ и локален минимум при $x=1+\sqrt{1+m}$;

При $m\leq -1$ $f(x)$ няма локални екстремуми;

При $m>-1$ $f(x)$ има локален максимум за $x=1-\sqrt{1+m}$ и локален минимум за $x=1+\sqrt{1+m}$.

При всяко m $f(x)$ има инфлексна точка при $x=1$.



32. а) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-ax^2+(a^2-1)x+1$, дефинирана в $(-\infty,\infty)$.

$f'(x)=x^2-2ax+a^2-1$

Производната е квадратен тричлен със старши коефициент $1>0$, дискриминанта $D'=1$ и корени $x_1=a-1$, $x_2=a+1$.

Тъй като $x_1<x_2$, то производната си сменя знака около $x_2=a+1$ от − на +.

$\Rightarrow$ $f(x)$ има локален минимум при $x_2=a+1$.

По условие локалният минимум е при $x=4$

$\Rightarrow$ $a+1=4$, $a=3$.

б) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}-ax^2+(a^2-4)x-1$, дефинирана в $(-\infty,\infty)$.

$f'(x)=x^2-2ax+a^2-4$.

Производната е квадратен тричлен със старши коефициент $1>0$, дискриминанта $D'=4$ и корени $x_1=a-2$, $x_2=a+2$.

Тъй като $x_1<x_2$, то производната си сменя знака около $x_1=a-2$ от + на −.

$\Rightarrow$ $f(x)$ има локален максимум при $x_1=a-2$.

По условие локалният максимум е при $x=5$

$\Rightarrow$ $a-2=5$, $a=7$.

33. Да се намери броят на корените на уравнението.

а) $2x^3+4x^2+2x+\dfrac{8}{27}=0$

Съкращаваме уравнението на 2 и получаваме:

$x^3+2x^2+x+\dfrac{4}{27}=0$

Записваме уравнението с цели коефициенти:

$27x^3+54x^2+27x+4=0$.

Забелязваме, че $x=-\dfrac{1}{3}$ е корен на уравнението и като използваме схемата на Хорнер получаваме:

$\left(x+\dfrac{1}{3}\right)(27x^2+45x+12)=0$ или $27\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\left(x+\dfrac{1}{3}\right)\left(x+\dfrac{4}{3}\right)=0$.

Уравнението има три корена – един двукратен корен $x_{1,2}=-\dfrac{1}{3}$ и един прост корен $x_3=-\dfrac{4}{3}$.

б) $3x^3+x^2-7x+4=0$

Уравнението няма рационални корени. Ще изследваме изменението на функцията $f(x)=3x^3+x^2-7x+4$, за да намерим броя на корените на уравнението.

$f'(x)=9x^2+2x-7=(x+1)(9x-7)=0$. Тогава:

$f(x)$ расте в $(-\infty,-1)$ $\Rightarrow$ има най-много един корен в този интервал.

$f(x)$ намалява в $\left(-1,\dfrac{7}{9}\right)$ $\Rightarrow$ има най-много един корен в този интервал.

$f(x)$ расте в $\left(\dfrac{7}{9},\infty\right)$ $\Rightarrow$ има най-много един корен в този интервал.

$\Rightarrow$ $f(x)$ има най-много три корена.

Пресмятаме $f(-2)=-2<0$ и $f(-1)=6>0$ и според теоремата на Болцано $f(x)$ има поне един корен в интервала $(-2,-1)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ има точно един корен в интервала $(-2,-1)$, т.е. в $(-\infty,-1)$

Пресмятаме $f(\frac{7}{9})=\dfrac{139}{243}$.

В интервала $(-1,\infty)$ производната има единствен корен $x=\dfrac{7}{9}$ и $f(x)$ има локален минимум в тази точка $\Rightarrow$ $\min\limits_{(-1,\infty)} f(x)=f_{\min}=f(\frac{7}{9})=\dfrac{139}{243}>0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ няма корени в $(-1,\infty)$.

Окончателно уравнението има само един корен.

Коментар. Вместо да пресмятаме $f(-2)$ може да разсъждаваме така:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ $\Rightarrow$ съществува число $m<-1$, за което $f(m)<0$ и тъй като $f(-1)=6>0$, то според теоремата на Болцано $f(x)$ има поне един корен в интервала $(m,-1)$.▲

в) $\dfrac{x^3}{3}+2x^2+3x+1=0$

Нека $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+2x^2+3x+1$

$f'(x)=x^2+4x+3=(x+3)(x+1)=0$.

Производната има два корена -3 и –1, около които си сменя знака. Тогава:

$f(x)$ расте в $(-\infty,-3)$ $\Rightarrow$ има най-много един корен в този интервал.

$f(x)$ намалява в $(-3,-1)$ $\Rightarrow$ има най-много един корен в този интервал.

$f(x)$ расте в $(-1,\infty)$ $\Rightarrow$ има най-много един корен в този интервал.

Пресмятаме $f(-4)=-\dfrac{1}{3}<0$

$f(-3)=1>0$

$f(-1)=-\dfrac{1}{3}<0$

$f(0)=1>0$

Според теоремата на Болцано $f(x)$ има поне по един корен във всеки от интервалите $(-4,-3)$, $(-3,-1)$, $(-1,0)$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ има точно три различни корена $\alpha_1\in(-4,-3)$, $\alpha_2\in(-3,-1)$ и $\alpha_3\in(-1,0)$.

г) $2x^4 - 16x^3 + 44x^2 - 48x + 17 = 0$

Нека $f(x) = 2x^4 - 16x^3 + 44x^2 - 48x + 17$

$f'(x) = 8x^3 - 48x^2 + 88x - 48 = 8(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 8(x-1)(x-2)(x-3) = 0$.

Производната има три корена: 1, 2 и 3, около които си сменя знака и:

$f_{\min} = f(1) = -1$

$f_{\max} = f(2) = 1$

$f_{\min} = f(3) = -1$

Във всеки от интервалите $(-\infty,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,\infty)$ $f(x)$ е монотонна $\Rightarrow$ има най-много по един корен.

Да пресметнем и $f(0) = 17$ и $f(4) = 17$.

Тогава $f(0) > 0$, $f(1) < 0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ има поне един корен в интервала $(0,1)$.

По същия начин установяваме, че $f(x)$ има поне един корен във всеки от интервалите $(1,2)$, $(2,3)$, (3.4).

Следователно $f(x)$ има точно четири различни корена по един във всеки от интервалите $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$ и (3.4) – $\alpha_1 \in (0,1)$, $a_2 \in (1,2)$, $\alpha_3 \in (2,3)$ и $a_4 \in (3,4)$.

д) $\dfrac{3}{5}x^5 - \dfrac{3}{2}x^4 - x^3 + 3x^2 - \dfrac{1}{2} = 0$

Нека $f(x) = \dfrac{3}{5}x^5 - \dfrac{3}{2}x^4 - x^3 + 3x^2 - \dfrac{1}{2}$.

$f'(x) = 3x^4 - 6x^3 - 3x^2 + 6x = 3x(x+1)(x-1)(x-2) = 0$.

Производната има четири корена, около които си сменя знака и:

$f_{\max} = f(-1) = \dfrac{7}{5}$

$f_{\min} = f(0) = -\dfrac{1}{2}$

$f_{\max} = f(1) = \dfrac{3}{5}$

$f_{\min} = f(2) = -\dfrac{13}{10}$

$f(x)$ е монотонна във всеки от интервалите $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$ и $(2,\infty)$ $\Rightarrow$ има най-много по един корен във всеки от тях.

Да пресметнем $f(-2) = -\dfrac{237}{10}$ и $f(3) = \dfrac{119}{3}$.

Тогава $f(-2) < 0$, $f(-1) > 0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ има поне един корен в интервала $(-2,-1)$.

По същия начин установяваме, че $f(x)$ има поне един корен във всеки от интервалите $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$ и $(2,3)$.

Следователно $f(x)$ има точно пет различни корена $\alpha_1 \in (-2,-1)$, $a_2 \in (-1,0)$, $\alpha_3 \in (0,1)$, $a_4 \in (1,2)$ и $\alpha_5 \in (2,3)$.

34. б) $\dfrac{x^4}{12}+\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{4x}{5}-\dfrac{1}{3}=0$

Нека $f(x)=\dfrac{x^4}{12}+\dfrac{2x^3}{3}+\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{4x}{5}-\dfrac{1}{3}$

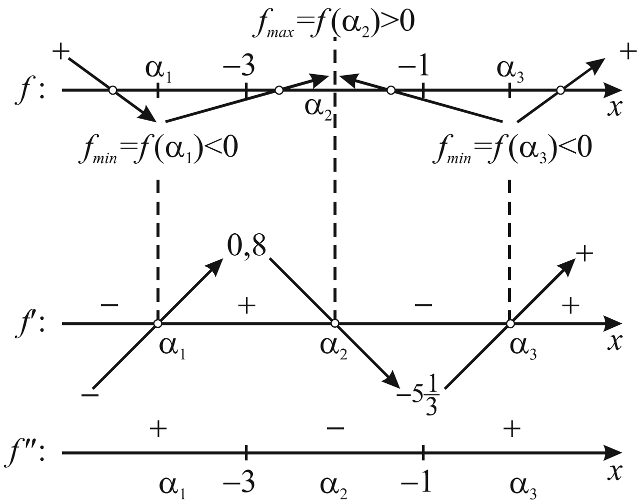
$f'(x)=\dfrac{x^3}{3}+2x^2+3x+\dfrac{4}{5}=0$ няма рационални корени.

$f''(x)=x^2+4x+3=(x+3)(x+1)$

f'' си сменя знака около -3 от + на – и около -1 от – на +. Следователно f' има точно два екстремума: $f'_{\max}=f'(-3)=0,8>0$ и $f'_{\min}=f'(-1)=-5\dfrac{1}{3}<0$.

Тъй като $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$ и като вземем предвид монотонността на $f(x)$, заключаваме, че $f'(x)$ има точно по един корен във всеки от интервалите $(-\infty,-3)$, $(-3,-1)$ и $(-1,+\infty)$, които означаваме съответно с α_1, α_2 и α_3.

След определяне знака на f' във всеки от интервалите $(-\infty,\alpha_1)$, (α_1,α_2), (α_2,α_3) и $(\alpha_3,+\infty)$, заключаваме, че:



– $f(x)$ има три екстремума: $f_{\min}=f(\alpha_1)$, $f_{\max}=f(\alpha_2)$, $f_{\min}=f(\alpha_3)$;

– в (α_1,α_2) $f(x)$ е растяща $\Rightarrow$ $f(\alpha_1)<f(-3)$;

– най-голямата стойност на $f(x)$ в интервала $(-3,-1)$ е $f(\alpha_2)$;

– в (α_2,α_3) $f(x)$ е намаляваща $\Rightarrow$ $f(\alpha_3)<f(-1)$.

В интервала $(-\infty,\alpha_1)$ $f(x)$ е намаляваща, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ и $f(\alpha_1)<f(-3)=-\dfrac{29}{60}<0$, следователно $f(x)$ има единствен корен в интервала $(-\infty,\alpha_1)$.

В интервала (α_1,α_2) $f(x)$ е растяща, $f(\alpha_1)<f(-3)=-\dfrac{29}{60}<0$ и $f(\alpha_2)>f(-2)=\dfrac{1}{15}>0$ ($-2\in(-3,-1)$) следователно $f(x)$ има единствен корен в интервала (α_1,α_2).

В интервала (α_2, α_3) $f(x)$ е намаляваща, $f(\alpha_2) > f(-2) = \dfrac{1}{15} > 0$ $(-2 \in (-3, -1))$ и $f(\alpha_3) < f(-1) = -\dfrac{13}{60} < 0$ следователно $f(x)$ има единствен корен в интервала (α_2, α_3).

В интервала $(\alpha_3, +\infty)$ $f(x)$ е растяща, $f(\alpha_3) < f(-1) = -\dfrac{13}{60} < 0$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ следователно $f(x)$ има единствен корен в интервала $(\alpha_3, +\infty)$.

Окончателно $f(x)$ има четири корена.

35. $f(x) = \dfrac{x^5}{5} - 2x^3 + 8x$

Последователно намираме:

$f'(x) = x^4 - 6x^2 + 8$

$f''(x) = 4x^3 - 12x$

$f'''(x) = 12x^2 - 12$

$f^{IV}(x) = 24x$

а) $f^{IV}(x) = 24x$ – права през началото на координатната система, растяща функция.

б) $f'''(x) = 12x^2 - 12$ – квадратен тричлен с корени ± 1 и връх на параболата $x = 0$; четна

$\Rightarrow$ функцията е намаляваща в $(-\infty, 0)$, растяща в $(0, \infty)$, локален минимум $f'''_{\min} = f(0) = -12$, изпъкнала в $(-\infty, \infty)$.

в) $f''(x) = 4x^3 - 12x$, нечетна функция

Производната ѝ е $f'''(x) = 12x^2 - 12$ с корени -1 и 1

Следователно f'' расте в $(-\infty, -1)$, намалява в $(-1, 1)$, расте в $(1, \infty)$, $f''_{\max} = f''(-1) = 8$, $f''_{\min} = f''(1) = -8$,

Втората ѝ производна е $f^{IV}(x) = 24x$ с корен $(0,0)$ – инфлексна точка на f'', вдлъбната в $(-\infty, 0)$, изпъкнзала в $(0, \infty)$

г) $f'(x) = x^4 - 6x^2 + 8$

Производната ѝ е $f''(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$ с корени $-\sqrt{3}$, 0, $\sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ f' намалява в $(-\infty, -\sqrt{3})$, расте в $(-\sqrt{3}, 0)$, намалява в $(0, \sqrt{3})$, расте в $(\sqrt{3}, \infty)$.

$\Rightarrow$ $f'_{\min} = f'(-\sqrt{3}) = f'_{\min} = f'(\sqrt{3}) = -1$, $f'_{\max} = f'(0) = 8$.

Втората ѝ производна е $f'''(x) = 12x^2 - 12$ с корени -1 и 1.

$\Rightarrow$ инфлексни точки $(-1, 3)$ и $(1, 3)$, изпъкнала в $(-\infty, -1)$, вдлъбната в $(-1, 1)$, изпъкнала $(1, \infty)$.

д) $f(x)=\frac{x^5}{5}-2x^3+8x$, нечетна функция

Производната ѝ е $f'(x)=x^4-6x^2+8=(x+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x-2)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ расте в $(-\infty,-2)$, намалява в $(-2,-\sqrt{2})$, расте в $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$, намалява в $(\sqrt{2},2)$, расте в $(2,\infty)$.

$f_{\max}=f(-2)=-\frac{32}{5}$, $f_{\min}=f(-\sqrt{2})=-\frac{24\sqrt{2}}{5}$, $f_{\max}=f(\sqrt{2})=\frac{24\sqrt{2}}{5}$, $f_{\min}=f(2)=\frac{32}{5}$.

Втората ѝ производна е $f''(x)=4x^3-12x=4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ е вдлъбната в $(-\infty,-\sqrt{3})$, изпъкнала в $(-\sqrt{3},0)$, вдлъбната в $(0,\sqrt{3})$, изпъкнала в $(\sqrt{3},\infty)$, инфлексни точки $\left(-\sqrt{3},-\frac{19\sqrt{3}}{5}\right)$, $(0,0)$, $\left(\sqrt{3},\frac{19\sqrt{3}}{5}\right)$..

Задачи, в които се въвежда нова функция

39. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+a}$

Нека $g(x)=x^2-3x+a$.

Функцията $f(x)$ е дефинирана за всяко реално x, когато $g(x)\neq 0$, което е изпълнено, когато дискриминантата на $g(x)$ е отрицателна за всяко реално x. Имаме $D=9-4a<0$, $a>\frac{9}{4}$. Следователно при $a>\frac{9}{4}$ $f(x)$ е дефинирана за всяко реално x и освен това $f(x)>0$ и $g(x)>0$.

Тогава $f(x)$ приема най-голямата си стойност в интервала $[0,a]$ за тези x, за които $g(x)$ приема най-малката си стойност в този интервал и $f(x)$ приема най-малката си стойност в интервала $[0,a]$ за тези x, за които $g(x)$ приема най-голямата си стойност в този интервал.

Да намерим най-малката и най-голямата стойност на $g(x)$.

Тъй като $g(x)$ е квадратна функция с положителен старши коефициент, то тя достига най-малката си стойност във върха на параболата, т.е. при $x=\frac{3}{2}$.

$\frac{3}{2}\in[0,a]$, защото $0<\frac{3}{2}<\frac{9}{4}<a$ $\Rightarrow$ $\min\limits_{[0,a]} g(x)=g(\frac{3}{2})=a-\frac{9}{4}=\frac{4a-9}{4}$.

За да намерим най-голямата стойност на $g(x)$, изчисляваме $g(0)$ и $g(a)$.

$g(0)=a$

$g(a)=a^2-2a$

За да сравним $g(0)$ и $g(a)$, образуваме разликата и определяме знака ѝ за $a>\frac{9}{4}$.

$g(a)-g(0)=a^2-3a=a(a-3)$.

При $\dfrac{9}{4} < a \le 3$, $g(a) - g(0) < 0 \quad \Rightarrow \quad g(a) < g(0) \quad \Rightarrow \quad \max\limits_{[0,a]} g(x) = g(0) = a$.

При $a > 3$, $g(a) - g(0) > 0 \quad \Rightarrow \quad g(a) > g(0) \quad \Rightarrow \quad \max\limits_{[0,a]} g(x) = g(a) = a^2 - 2a$.

За най-голямата и най-малката стойност на $f(x)$ получаваме:

При $a > \dfrac{9}{4}$,

$$\max_{[0,a]} f(x) = \frac{1}{\min\limits_{[0,a]} g(x)} = \frac{4}{4a-9}$$

При $\dfrac{9}{4} < a \le 3$, $\quad \min\limits_{[0,a]} f(x) = \dfrac{1}{\max\limits_{[0,a]} g(x)} = \dfrac{1}{a}$

При $a > 3$, $\min\limits_{[0,a]} f(x) = \dfrac{1}{\max\limits_{[0,a]} g(x)} = \dfrac{1}{a^2 - 2a}$.

40. $f(x) = 2^{-4x} + 2^{3(1-x)} + 2^{2(2-x)}$

Полагаме $2^{-x} = t$, при което при $x \in [-3,3]$ имаме $t \in \left[\dfrac{1}{8}, 8\right]$.

Заместваме $2^{-x} = t$ във функцията $f(x)$ и получаваме функция на *t*, която да означим $g(t)$ и $g(t) = t^4 + 8t^3 + 16t^2$.

Тогава най-голямата (най-малката) стойност на $f(x)$ в интервала $[-3,3]$ ще бъде равна на най-голямата (най-малката) стойност на $g(t)$ в интервала $\left[\dfrac{1}{8}, 8\right]$.

Да намерим най-голямата и най-малката стойност на $g(t)$ в $\left[\dfrac{1}{8}, 8\right]$.

$g'(t) = 4t^3 + 24t^2 + 32t = 4t(t+4)(t+2)$.

В интервала $\left[\dfrac{1}{8}, 8\right]$ $\quad g'(t) > 0 \quad \Rightarrow \quad g(t)$ е растяща $\Rightarrow$

$$\min_{\left[\frac{1}{8},8\right]} g(t) = g\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1089}{4096} \quad \text{и} \quad \max_{\left[\frac{1}{8},8\right]} g(t) = g(8) = 9216.$$

За $f(x)$ получаваме $\min\limits_{[-3,3]} f(x) = \dfrac{1089}{4096}$ и $\max\limits_{[-3,3]} f(x) = 9216$.

41. $f(x) = \sin x + \cos x + 2\sin x \cos x$

Полагаме $y = \sin x + \cos x$.

Намираме стойностите, които може да приема променливата y.

Записваме y във вида $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Тъй като $-1 \le \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \le 1$, то $-\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}$.

Остава да изразим $\sin x \cos x$ чрез y. Имаме:

$$y^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 1 + 2\sin x \cos x \quad \Rightarrow \quad \sin x \cos x = \frac{y^2 - 1}{2}.$$

Заместваме във функцията $f(x)$ и получената функция да означим с $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) = y + 2.\frac{y^2 - 1}{2} = y^2 + y - 1, \quad y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$$

Функцията $\varphi(y)$ е квадратен тричлен и най-малката ѝ стойност се достига във върха на параболата за $y = -\frac{1}{2}$ и $\varphi(-\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4}$.

$$\Rightarrow \min_{[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]} \varphi(y) = \varphi(-\frac{1}{2}) = -\frac{5}{4}.$$

Най-голямата стойност на $\varphi(y)$ се достига в край на интервала. Пресмятаме:

$\varphi(-\sqrt{2}) = 1 - \sqrt{2}$ и $\varphi(\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \max\limits_{[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]} \varphi(y) = \varphi(\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$.

За $f(x)$ получаваме $\max f(x) = 1 + \sqrt{2}$ и $\min f(x) = -\frac{5}{4}$.

Допирателни към криви от втора степен

42. $x^2+y^2-6x-41=0$

Записваме уравнението на окръжността в нормален вид.

$(x-3)^2+y^2=50$

Нека $A(m,n)$ е една от допирните точки.

равнението на допирателната в точката A е:

$(m-3)(x-3)+ny=50 \quad \Leftrightarrow$

(1) $$(m-3)x+ny-3m-41=0.$$

Допирателната и дадената права $2x-2y+9=0$ са успоредни $\Rightarrow \dfrac{m-3}{2}=\dfrac{n}{-2} \quad \Leftrightarrow \quad 3-m=n$.

Образуваме системата $\left|\begin{array}{l}(m-3)^2+n^2=50\\ 3-m=n\end{array}\right.$, чиито решения са $(-2,5)$ и $(8,-5)$.

Заместваме в (1) и получаваме уравненията на двете допирателни:

$t_1:\ x-y+7=0$ и $t_2\ x-y-13=0$.

43. Правата $x-2y+15=0$ е допирателна към окръжността $x^2+y^2=45$. Намерете дължината на отсечката, заключена между допираната точка на правата и окръжността и пресечната точка на правата с абсцисната ос.

Общата точка на дадената права и окръжността намираме като решим системата:

$\left|\begin{array}{l}x-2y+15=0\\ x^2+y^2=45\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad (-3,6).$

Общата точка на дадената права и абсцисната ос е решение на системата:

$\left|\begin{array}{l}x-2y+15=0\\ y=0\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad (-15,0).$

Разстоянието между двете точки е $\sqrt{(-3+15)^2+(6-0)^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$.

44. а) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$, $(5,-6)$

Кривата е хипербола..

Допирателната е $\frac{5x}{16}-\frac{-6y}{64}=1$, $10x+3y-32=0$

б) $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{7}=1$, $(\sqrt{5},0)$

Кривата е елипса.

Допирателната е $\frac{\sqrt{5}x}{5}+\frac{0.y}{7}=1$, $x=\sqrt{5}$.

в) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{70}=1$, $(3,-2\sqrt{7})$

Кривата е елипса.

Допирателната е $\frac{3x}{15}+\frac{-2\sqrt{7}\,y}{70}=1$, $7x-\sqrt{7}y-35=0$

г) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{9}=1$, $(5\sqrt{5},\frac{3}{2})$

Кривата е хипербола .

Допирателната е $\frac{5\sqrt{5}x}{100}-\frac{\frac{3}{2}y}{9}=1$, $3\sqrt{5}x-10y-60=0$.

д) $y=x^2+5x-2$, $(-4,-6)$

Кривата е парабола.

$y'=2x+5$, $y'(-4)=-3$

Допирателната е $y=-3(x+4)-6$, $3x+y+18=0$

е) $y=x^2-x+7$, $(1,7)$

Кривата е парабола.

$y'=2x-1$, $y'(1)=1$.

Допирателната е $y=1.(x-1)+7$, $x-y+6=0$.

45. а) $y = x^2 + 4x - 5$, $(-6,7)$, $(-4,-5)$

Кривата е парабола.

Намираме $y' = 2x + 4$, $y'(-6) = -8$ и $y'(-4) = -4$.

Допирателната в точката $(-6,7)$ е $y = -8(x+6) + 7$, $8x + y + 41 = 0$.

Допирателната в точката $(-4,-5)$ е $y = -4(x+4) - 5$, $4x + y + 21 = 0$

Координатите на пресечната точка на двете допирателни са решение на системата:

$$\begin{vmatrix} 8x + y + 41 = 0 \\ 4x + y + 21 = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow (-5,-1).$$

б) $\dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{40} = 1$, $(3,2)$, $(-1,6)$

Кривата е елипса.

Допирателната в точката $(3,2)$ е $\dfrac{3x}{10} + \dfrac{2y}{40} = 1$, $6x + y - 20 = 0$.

Допирателната в точката $(-1,6)$ е $\dfrac{-1x}{10} + \dfrac{6y}{40} = 1$, $2x - 3y + 20 = 0$.

Координатите на пресечната точка на двете допирателни са решение на системата:

$$\begin{vmatrix} 6x + y - 20 = 0 \\ 2x - 3y + 20 = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow (2,8).$$

в) $y = 2x^2 + 5x + 3$, $(-4,15)$, $(0,3)$

Кривата е парабола.

Намираме $y' = 4x + 5$, $y'(-4) = -11$ и $y'(0) = 5$

Допирателната в точката $(-4,15)$ е $y = -11(x+4) + 15$, $11x + y + 29 = 0$

Допирателната в точката $(0,3)$ е $y = 5(x-0) + 3$, $5x - y + 3 = 0$

Координатите на пресечната точка на двете допирателни са решение на системата:

$$\begin{vmatrix} 11x + y + 29 = 0 \\ 5x - y + 3 = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow (-2,-7).$$

г) $\dfrac{x^2}{30} + \dfrac{y^2}{6} = 1$, $(\frac{5}{3},\frac{7}{3})$, $(5,1)$

Кривата е елипса.

Допирателната в точката $(\frac{5}{3},\frac{7}{3})$ е $\dfrac{5x}{3.30} + \dfrac{7y}{3.6} = 1$, $5x + 35y - 90 = 0$, $x + 7y - 18 = 0$

Допирателната в точката $(5,1)$ е $\dfrac{5x}{30} + \dfrac{y}{6} = 1$, $5x + 5y - 30 = 0$, $x + y - 6 = 0$

Координатите на пресечната точка на двете допирателни са решение на системата:

$$\begin{vmatrix} x + 7y - 18 = 0 \\ x + y - 6 = 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow (4,2).$$

46. $\dfrac{x^2}{50}-\dfrac{y^2}{4.A}=1$ е канонично уравнение на хипербола $\Rightarrow$ $4.A=b^2$ $\Rightarrow$ $A>0$.

$f:\ Ax-5y-20=0$ се допира до хиперболата, условието за което е уравнението $A^2.50-25.4A-400=0$ с корени -2 и 4 и тъй като $A>0$ $\Rightarrow$ $A=4$.

Тогава $f: 4x-5y-20=0$ и $g: 4x-7y-4=0$.

Пресечната им точка е $(15,8)$.
Отговор Г.

47. Допирателната към елипсата в точката $(6,1)$ е $\dfrac{6x}{45}+\dfrac{y}{5}=1$, $2x+3y-15=0$.

Допирателната към хиперболата в точката $(6,1)$ е $\dfrac{6x}{32}-\dfrac{y}{8}=1$, $3x-2y-16=0$.

Тъй като $2.3+3.(-2)=0$, косинусът на ъгъла между двете прави е 0 $\Rightarrow$ ъгълът е $90°$.

48. $f:\ x+Ay+2=0$ е допирателна към хиперболата $\dfrac{x^2}{13}-y^2=1$, условието за което е $1.13-A^2.1-4=0$, $A^2=9$, $A=\pm 3$ $\Rightarrow$ $f:\ x\pm 3y+2=0$

$g:\ x+By+2=0$ е допирателна към хиперболата $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{2}=1$, условието за което е $1.12-B^2.2-4=0$, $B^2=4$, $B=\pm 2$ $\Rightarrow$ $g:\ x\pm 2y+2=0$.

Системата $\left|\begin{array}{l} x\pm 3y+2=0 \\ x\pm 2y+2=0 \end{array}\right.$ има решение $(-2,0)$ при всяка комбинация между знаците пред y.