Общи задачи
Приложения на математическия анализ

1. $f'(x)=\dfrac{1}{x}+2$, $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$

$\Rightarrow\ f''\left(\dfrac{1}{4}\right)=-\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2}=-16$.

2. $f'(x)=4x^3-6x^2+6x$, $f''(x)=12x^2-12x+6$, $f'''(x)=24x-12$.

$\Rightarrow\ f'''(1)=24-12=12$.

3. *Първи начин*

Уравнението на допирателната в точката $\left(x_0, f(x_0)\right)$ към графиката на функцията $f(x)$ е

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

$f(x)=\dfrac{1}{3x+1}$

Пресмятаме $f'\left(\dfrac{1}{3}\right)$: $f'(x)=-\dfrac{3}{(3x+1)^2}\ \Rightarrow\ f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{3}{\left(3.\dfrac{1}{3}+1\right)^2}=-\dfrac{3}{4}$.

Пресмятаме $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3.\dfrac{1}{3}+1}=\dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ допирателната в точката $\left(\dfrac{1}{3}, f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)$ е $y=-\dfrac{3}{4}\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{2}$, $3x+4y-3=0$.

Втори начин

Декартовото уравнение на допирателната в точката $\left(x_0, f(x_0)\right)$ към графиката на функцията $f(x)$ е $y=f'(x_0)x+b$, където коефициента b намираме от условието, че точката $\left(x_0, f(x_0)\right)$ лежи на допирателната.

Пресмятаме (както по-горе) $f'\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{3}{4}$.

$\Rightarrow$ допирателната е $y=-\dfrac{3}{4}x+b$.

Пресмятаме (както по-горе) $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$.

Точката $\left(\dfrac{1}{3}, f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}\right)$ лежи на допирателната $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{2}=-\dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{3}+b$, $b=\dfrac{3}{4}$.

$\Rightarrow$ допирателната е $y=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{3}{4}$, $3x+4y-3=0$.

4. $f(x) = x^2 - 2x + 5$

$f'(x) = 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad f'(2) = 2$

$f(2) = 5$

$\Rightarrow$ допирателната в точката $(2, f(2))$ е $y = 2(x-2) + 5$, $2x - y + 1 = 0$.

5. $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 5$

Намираме $f'(x) = 3x^2 + 2x - 3$

Нека $\left(x, f(x)\right)$ е точка от графиката на функцията и нека допирателната в тази точка към графиката на функцията сключва ъгъл α с положителната посока на абсцисната ос

Търсим тези x, за които $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha = 2$, $3x^2 + 2x - 3 = 2$, $x_1 = -\dfrac{5}{3}$ и $x_2 = 1$ са абсцисите на точките от графиката, в които допирателната сключва с положителната посока на абсцисната ос ъгъл с тангенс, равен на 2.

6. $f(x) = \sqrt{2x-4}$, дефинирана при $x \geq 2$.

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-4}}$, $x > 2$.

По условие $f'(x) = \operatorname{tg}45° = 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{2x-4}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x-4} = 1,\quad 2x - 4 = 1,\quad x = \dfrac{5}{2}$. С проверка установяваме, че $x = \dfrac{5}{2}$ е корен на ирационалното уравнение.

Пресмятаме $f(\frac{5}{2}) = 1 \Rightarrow$ в точката $\left(\dfrac{5}{2}, 1\right)$ допирателната към графиката на $f(x)$ сключва с положителната посока на абсцисната ос ъгъл $45°$.

7. а) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} - 2x + 2$

$f'(x) = x^3 + x^2 - 5x - 2 = (x-2)(x^2 + 3x + 1) = 0$, $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = 2$.

Прилагаме метода на интервалите и получаваме, че

$f(x)$ е намаляваща в $(-\infty, x_1)$ и в $(x_2, 2)$.

$f(x)$ е растяща в $(x_1, x_{2)}$ и в $(2, +\infty)$.

б) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$, дефинирана при $x \in (-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$ и диференцируема при $x \in (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$.

$f'(x) = \dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x}}$.

Числителят се анулира при $x = -\dfrac{3}{2}$ и $2x + 3 < 0$ за $x < -\dfrac{3}{2}$, $2x + 3 > 0$ за $x > -\dfrac{3}{2}$.

Тъй като $-\dfrac{3}{2} \notin (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$, то

$f(x)$ е намаляваща в $(-\infty, -3)$. $f(x)$ е растяща в $(0, +\infty)$.

в) $f(x)=\sqrt{x^2-2x}$

г) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-2}{x^2+3x+3}$

8. а) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4x+3}$, дефинирана и диференцируема при $x\neq\{1,3\}$.

$f'(x)=\dfrac{4-2x}{(x^2-4x+3)^2}=\dfrac{2(2-x)}{(x-1)^2(x-3)^2}$.

$\Rightarrow f(x)$ расте в $(-\infty,1)$ и в $(1,2)$.

$f(x)$ намалява в $(2,3)$ и в $(3,+\infty)$.

$f'(x)$ си сменя знака около точката 2 от + на – $\Rightarrow$ $f(x)$ има локален максимум и $f_{\max}=f(2)=0$.

б) $f(x)=\dfrac{x^2-x+3}{x^2-x-2}$, дефинирана и диференцируема при $x\neq\{-1,2\}$.

$f'(x)=\dfrac{5(1-2x)}{(x^2-x-2)^2}=\dfrac{5(1-2x)}{(x+1)^2(x-2)^2}$.

$\Rightarrow f(x)$ расте в $(-\infty,-1)$ и в $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$.

$f(x)$ намалява в $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ и в $(2,+\infty)$.

$f'(x)$ си сменя знака около точката $\dfrac{1}{2}$ от + на – $\Rightarrow$ $f(x)$ има локален максимум и $f_{\max}=f(\frac{1}{2})=-\dfrac{11}{9}$.

в) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-2}{x^2-7x+10}$, дефинирана и диференцируема при $x\neq\{2,5\}$.

$f'(x)=\dfrac{-5x^2+24x-34}{(x^2-7x+10)^2}$

Числителят е квадратен тричлен с отрицателна дискриминанта $\Rightarrow$ $f'(x)<0,\ \forall x$.

$\Rightarrow f(x)$ намалява в $(-\infty,2)$, намалява в $(2,5)$ и намалява в $(5,+\infty)$.

Няма локални екстремуми.

г) $f(x)=\dfrac{x^2+2x-2}{x^2-x-6}$, дефинирана и диференцируема при $x\neq\{-2,3\}$.

$f'(x)=\dfrac{-3x^2-8x-14}{(x^2-x-6)^2}$

Числителят е квадратен тричлен с отрицателна дискриминанта $\Rightarrow$ $f'(x)<0,\ \forall x$.

$\Rightarrow f(x)$ намалява в $(-\infty,-2)$, намалява в $(-2,3)$ и намалява в $(3,+\infty)$.

Няма локални екстремуми.

д) $f(x)=\ln(x^4+x^2)$, дефинирана и диференцируема при $x\neq 0$.

$$f'(x)=\frac{4x^3+2x}{x^4+x^2}=\frac{2x(2x^2+1)}{x(x^3+x)}=\frac{4x^2+2}{x^3+x}$$

Производната си сменя знака около точката $x=0$, но функцията не е дефинирана в тази точка.

$\Rightarrow$ $f(x)$ намалява в $(-\infty,0)$ и расте в $(0,+\infty)$,

Няма локални екстремуми.

е) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$, дефинирана и диференцируема при $x>0$ и $x\neq 1$.

$f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}=0$, $\ln x=1$, $x=e$.

Функцията $\ln x$ е растяща, тогава:

при $0<x<e$ имаме $\ln x<\ln e=1 \Rightarrow \ln x-1<0$;

при $e<x$ имаме $1=\ln e<\ln x \;\Rightarrow\; \ln x-1>0$.

За производната $f'(x)$ при $x>0$ и $x\neq 1$ получаваме:

$f'(x)<0$ в $(0,1)$ и в $(1,e)$;

$f'(x)>0$ в $(e,+\infty)$

$f'(x)$ си сменя знака около точката $x=e$ от $-$ на $+$.

За функцията $f(x)$ получаваме:

намалява в $(0,1)$ и в $(1,e)$;

расте в $(e,+\infty)$;

има локален минимум при $x=e$ и $f_{\min}=f(e)=e$.

9. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, дефинирана в $(-\infty,+\infty)$.

$f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}=0$ и $x=0$ е единствен корен.

Функцията $y=e^{-\frac{x^2}{2}}>0$ за всяко x.

$\Rightarrow$ $f'(x)>0$ при $x\in(-\infty,0)$ и $f'(x)<0$ при $x\in(0,+\infty)$.

$f''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1)$. Знакът на $f''(x)$ се определя от знака на израза x^2-1.

$\Rightarrow$ $f''(x)>0$ при $x\in(-\infty,-1)$ и $f''(x)<0$ при $x\in(-1,1)$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

Тогава за функцията $f(x)$ получаваме:

расте в $(-\infty,0)$, намалява е $(0,+\infty)$;

има локален максимум при $x=0$ и $f_{\max}=f(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$;

$\max\limits_{(-\infty,\infty)} f(x) = f_{\max} = f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$;

изпъкнала е в $(-\infty,-1)$, вдлъбната е в $(-1,1)$ и изпъкнала е в $(1,+\infty)$;

има инфлексия при $x=-1$ и $x=1$;

$y=0$ е хоризонтална асимптота.

10. $f(x)=\ln(x^3-x)$, дефинирана при $x^3-x>0 \iff x\in(-1,0)\cup(1,+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{3x^2-1}{x^3-x}=0$, $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow$ $f'(x)>0$ в $\left(-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и в $(1,+\infty)$; $f'(x)<0$ в $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)$.

За функцията $f(x)$ получаваме:

расте в $\left(-1,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$, намалява в $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0\right)$ и расте в $(1,+\infty)$;

има локален максимум при $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ и $f_{\max}=f(-\dfrac{\sqrt{3}}{3})=\ln\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

11. а) $f(x)=\ln(x^2+1)-x$, дефинирана в $(-\infty,\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{-(x-1)^2}{x^2+1}\le 0,\ \ \forall x$ и $f'(x)=0$ за $x=1$, но не си сменя знака около тази точка.

$\Rightarrow$ $f(x)$ намалява в $(-\infty,\infty)$ и няма локални екстремуми.

$f''(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=0$, $x=\pm1$ и $f''(x)$ си сменя знака около тези точки.

$\Rightarrow$ $f(x)$ е вдлъбната в $(-\infty,-1)$, изпъкнала в $(-1,1)$ и вдлъбната в $(1,+\infty)$; има инфлексни точки $(-1,\ln 2)$ и $(1,\ln 2)$.

б) $f(x)=\ln(1+x^2)$, дефинирана в $(-\infty,\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$

$f''(x)=2.\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$

$\Rightarrow$ $f(x)$ намалява в $(-\infty,0)$ и расте в $(0,\infty)$;

има локален минимум в точката 0 и $f_{\min}=f(0)=0$;

вдлъбната е в $(-\infty,-1)$, изпъкнала в $(-1,1)$ и вдлъбната в $(1,\infty)$;

има инфлексни точки $(-1,\ln 2+1)$ и $(1,\ln 2-1)$.

13. $f(x)=\dfrac{x^2+3x-2}{x^2+2x+2}$, дефинирана за всяко x.

$f'(x)=\dfrac{-x^2+8x+10}{(x^2+2x+2)^2}=0$, $x_1=4-\sqrt{26}$ и $x_2=4+\sqrt{26}$.

Производната си сменя знака около x_1 от – на + и около x_2 от + на –

$\Rightarrow f_{\min}=f(4-\sqrt{26})$ и $f_{\max}=f(4+\sqrt{26})$.

За изчисляване на локалните екстремуми ще използваме, че x_1 и x_2 са корени на уравнението

$$-x^2+8x+10=0 \quad \Rightarrow \quad x_i^2=8x_i+10,\ i=1,2.$$

$$\Rightarrow f(x_i)=\frac{8x_i+10+3x_i-2}{8x_i+10+2x_i+2}=\frac{11x_i+8}{2(5x_i+6)}$$

$$f(x_1)=f(4-\sqrt{26})=\frac{52-11\sqrt{26}}{2(26-5\sqrt{26})}=$$

$$=\frac{\left(52-11\sqrt{26}\right)\left(26+5\sqrt{26}\right)}{2\left(26^2-25.26\right)}=$$

$$=\frac{52.26+5.52\sqrt{26}-11.26\sqrt{26}-55.26}{2.26(26-25)}=$$

$$=\frac{52-55+10\sqrt{26}-11\sqrt{26}}{2}=\frac{-3-\sqrt{26}}{2} \quad \Rightarrow \quad f_{\min}=f(4-\sqrt{26})=\frac{-3-\sqrt{26}}{2}.$$

Аналогично получаваме $f_{\max}=f(4+\sqrt{26})=\dfrac{-3+\sqrt{26}}{2}$.

14. а) $f(x)=\sin x+\cos x$

$f'(x)=\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-x)=0$

Решенията на уравнението $\sin(\frac{\pi}{4}-x)=0$ са $\frac{\pi}{4}-x=k\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$

Ще използваме критерия за локален екстремум с втора производна.
$f''(x)=-\sin x-\cos x$.

При $k=2n$, $f''(\frac{\pi}{4}+2n\pi)=-\sin(\frac{\pi}{4}+2n\pi)-\cos(\frac{\pi}{4}+2n\pi)=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}<0$

$\Rightarrow f(x)$ има локален максимум и $f_{\max}=f(\frac{\pi}{4}+2n\pi)=\sqrt{2}$, $n=0,\pm1,\dots$

При $k=2n+1$, $f''(\frac{\pi}{4}+(2n+1)\pi)=-\sin(\frac{\pi}{4}+(2n+1)\pi)-\cos(\frac{\pi}{4}+(2n+1)\pi)=\sqrt{2}>0$

$\Rightarrow f(x)$ има локален минимум и $f_{\min}=f(\frac{\pi}{4}+(2n+1)\pi)=-\sqrt{2}$, $n=0,\pm1,\dots$

б) $f(x)=\sin^2 x\cos x$ в $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$

$f'(x)=2\sin x\cos^2 x-\sin^3 x=\sin x(2\cos^2 x-1+\cos^2 x)=\sin x(3\cos^2 x-1)=0$.

$\sin x=0$, $x=0\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ или

$\cos^2 x=\dfrac{1}{3}$, $\cos x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ще използваме критерия за локален екстремум с втора производна.

$f''(x)=(3\sin x\cos^2 x-\sin x)'=3\cos^3 x-6\sin^2 x\cos x-\cos x$.

При $\sin x=0$, $\cos x=1$ и $f''(0)=3-0-1=2>0 \Rightarrow f_{\min}=f(0)=0$.

При $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin^2 x=1-\cos^2 x=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$.

$\Rightarrow f''(x)=3.\dfrac{3\sqrt{3}}{27}-6.\dfrac{2}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}<0 \Rightarrow f_{\max}=\dfrac{2}{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$.

15. б) В задача 15. а) получихме, че първата производна се анулира при $\left|\begin{array}{l}\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\\ \dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}=-\dfrac{\pi}{6}+(2k+1)\pi\end{array}\right.$.

За да има функцията локален максимум, в точките, в които първата производна се анулира, трябва да е изпълнено $f''(x)=-\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}\right)<0$, т.е. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}\right)>0$.

Последното неравенство е изпълнено само при $\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi$, откъдето $x=4k\pi$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

16. $f(x)=e^{x^2+x}-x^2-x$, дефинирана за всяко x.

$f'(x)=e^{x^2+x}(2x+1)-2x-1=(2x+1)\left(e^{x^2+x}-1\right)=0$.

$2x+1=0$, $x=-\dfrac{1}{2}$ или $e^{x^2+x}=1$, $x^2+x=0$, $x=0$, $x=-1$.

$f''(x)=e^{x^2+x}(2x+1)^2+2e^{x^2+x}-2$.

$f''(-1)=1+2-2>0 \Rightarrow$ при $x=-1$ $f(x)$ има локален минимум и $f_{\min}=f(-1)=1$.

$f''(-\dfrac{1}{2})=0+2e^{-\frac{1}{4}}-2<0$, защото $e^{-\frac{1}{4}}<1 \Rightarrow$ при $x=-\dfrac{1}{2}$ $f(x)$ има локален максимум и $f_{\max}=f(-\dfrac{1}{2})=e^{-\frac{1}{4}}+\dfrac{1}{4}$.

$f''(0)=1>0 \Rightarrow$ при $x=0$ $f(x)$ има локален минимум и $f_{\min}=f(0)=1$.

17. а) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-3}$, дефинирана за $x\neq 3$.

$f'(x)=\dfrac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}=0$, $x_1=2$, $x_2=4$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ расте в $(-\infty,2)$, намалява в $(2,3)$, намалява в $(3,4)$, расте в $(4,\infty)$.

$f_{\max}=f(2)=1$, $f_{\min}=f(4)=5$.

$f''(x)=\dfrac{2}{(x-3)^3}$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ е вдлъбната в $(-\infty,3)$, изпъкнала в $(3,\infty)$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ има вертикална асимптота $x=3$ при $x\to 3$, $x<3$ и $x>3$, няма хоризонтални асимптоти.

б) $f(x)=\dfrac{-x^2-3x+2}{x-3}$, дефинирана за $x\neq 3$.

$f'(x)=\dfrac{-x^2+6x+7}{(x-3)^2}=\dfrac{(7-x)(x+1)}{(x-3)^2}=0$, $x_1=-1$, $x_2=7$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ намалява в $(-\infty,-1)$, расте в $(-1,3)$, расте в $(3,7)$, намалява в $(7,\infty)$.

$f_{\min}=f(-1)=-1$, $f_{\max}=f(7)=-17$.

$f''(x)=-\dfrac{32}{(x-3)^3}$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ е изпъкнала в $(-\infty,3)$, вдлъбната в $(3,\infty)$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\mp\infty$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ има вертикална асимптота $x=3$ при $x\to 3$, $x<3$ и $x>3$, няма хоризонтални асимптоти.

в) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}$, дефинирана за $x\neq -2$.

$f'(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}=\dfrac{(x+3)(x+1)}{(x+2)^2}=0$, $x_1=-3$, $x_2=-1$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ расте в $(-\infty,-3)$, намалява в $(-3,-2)$, намалява в $(-2,-1)$, расте в $(-1,\infty)$.

$f_{\max}=f(-3)=-4$, $f_{\min}=f(-1)=0$.

$f''(x)=\dfrac{2}{(x+2)^3}$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ е вдлъбната в $(-\infty,-2)$, изпъкнала в $(2,\infty)$.

$\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ има вертикална асимптота $x=-2$ при $x\to -2$. $x<-2$ и $x>-2$, няма хоризонтална асимптота.

Задачи за полиномна функция

18. а) $f(x)=x^3+x^2+x+1$, дефинирана в $(-\infty,\infty)$.

$f'(x)=3x^2+2x+1>0$, $f(x)$ е растяща в $(-\infty,\infty)$.

$f''(x)=6x+2=0$, $x=-\dfrac{1}{3}$; $f(x)$ е вдлъбната в $(-\infty,-\dfrac{1}{3})$, изпъкнала в $(-\dfrac{1}{3},\infty)$.

Инфлексна точка $(-\dfrac{1}{3},\dfrac{20}{27})$.

б) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+x+1$

в) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2+2x+1$;

г) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2+4x+1$.

19. $f(x)=y=ax^3+bx+c$, дефинирана в $(-\infty,\infty)$.

$f'(x)=3ax^2+b$.

Графиката на функцията минава през точките $A(1,0)$ и $B(3,-16)$ $\Rightarrow$

$$f(1)=0 \text{ и } f(3)=-16.$$

Ъгловият коефициент на допирателната към графиката на функцията, прекарана в точката от графиката с абсциса $x_1=-1$, е равен на нула $\Rightarrow$

$$f'(-1)=0.$$

Получаваме системата:

$$\left|\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ 27a+3b+c=-16 \\ 3a+b=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad a=-\frac{4}{5},\ b=\frac{12}{5},\ c=-\frac{8}{5}.$$

$\Rightarrow$ $f(x)=-\dfrac{4}{5}x^3+\dfrac{12}{5}x-\dfrac{8}{5}=-\dfrac{4}{5}(x^3-3x+2)$.

$f'(x)=-\dfrac{4}{5}(3x^2-3)=0$, $x_1=-1$, $x_2=1$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ намалява в $(-\infty,-1)$, расте в $(-1,1)$, намалява в $(1,\infty)$.

$f_{\min}=f(-1)=-\dfrac{16}{5}$, $f_{\max}=f(1)=0$.

$f''(x)=-\dfrac{24}{5}x$ $\Rightarrow$ $f(x)$ е изпъкнала в $(-\infty,0)$, вдлъбната в $(0,\infty)$, инфлексна точка $\left(0,-\dfrac{8}{5}\right)$.

20. $f(x) = x^3 + (a^2 - a + 7)x^2 - (3a^2 - 3a - 6)x - 2$, дефинирана в $(-\infty, \infty)$.

$f'(x) = 3x^2 + 2(a^2 - a + 7)x - (3a^2 - 3a - 6)$.

По условие допирателната към графиката на функцията в точката с абсциса $x = 1$ има ъглов коефициент $k = 21 \Rightarrow f'(1) = 21$.

$\Rightarrow f'(1) = -a^2 + a + 23 = 21$, $a^2 - a - 2 = 0$, $a = -1$, $a = 2$.

21. $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+1}$, дефинирана за $x \neq -1$.

$f'(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} < 0, \quad \forall x \Rightarrow f(x)$ намалява в $(-\infty, -1)$, намалява в $(-1, \infty)$.

$f(x)$ няма локални екстремуми.

$f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} \neq 0, \quad \forall x$.

$\Rightarrow f(x)$ няма инфлексни точки, вдлъбната в $(-\infty, -1)$, изпъкнала в $(-1, +\infty)$.

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \dfrac{2x+3}{x+1} = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \dfrac{2x+3}{x+1} = \infty \Rightarrow x = -1$ е вертикална асимптота при $x \to -1$ отляво и отдясно.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x+3}{x+1} = 2 \Rightarrow y = 2$ е хоризонтална асимптота при $x \to \pm\infty$.

Намираме:

$f(0) = 3$, и $f(x) = 0$ при $x = -\dfrac{3}{2}$.

Попълваме резултатите в таблица.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$-1-$	$-1+$	0		$+\infty$
$f'(x)$			$-$				$-$	
$f(x)$			$\searrow$				$\searrow$	
$f''(x)$			$-$				$+$	
$f(x)$	2	0	$\cap$	$-\infty$	$+\infty$	3	$\cup$	2

22. а) $f(x) = -x^4 + 2x^2$, дефинирана в $(-\infty, \infty)$.

$f(x)$ е четна функция.

$f'(x) = -4x^3 + 4x = 4x(-x^2 + 1) = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

$\Rightarrow f(x)$ намалява в $(-\infty.-1)$, расте в $(-1,0)$, намалява в $(0,1)$, расте в $(1, \infty)$.

$f_{\max} = f(-1) = 1$, $f_{\min} = f(0) = 0$, $f_{\max} = f(1) = 1$.

$f''(x) = -12x^2 + 4 = 4(1 - 3x^2) = 0$, $x_1 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ е вдлъбната в $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})$, изпъкнала в $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, вдлъбната в $(\frac{\sqrt{3}}{3},\infty)$. Има инфлексия при $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ и при $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $f(-\frac{\sqrt{3}}{3})=f(\frac{\sqrt{3}}{3})=\frac{5}{9}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\infty$.

$f(x)=-x^4+2x^2=x^2(2-x^2)=0$, $x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{2}$.

Попълваме резултатите в таблица.

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$	0		$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\underset{\max}{1}$	$\searrow$	$\underset{\min}{0}$	$\nearrow$	$\underset{\max}{1}$		$\searrow$
$f''(x)$			$-$	0	$+$	0	$-$		
$f(x)$	$+\infty$	0	$\cap$	$\frac{5}{9}$ инфл.	$\cup$	$\frac{5}{9}$ инфл.	$\cap$	0	$+\infty$

б) $f(x)=x^4-2x^2$;

в) $f(x)=\frac{1}{2}(3x-x^3)$;

г) $f(x)=x^3-x^2-x+2$;

д) $f(x)=x-\frac{x^3}{3}$;

е) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+2$;

ж) $f(x)=x^3-3x+3$.

24. $y = x^3 + px^2 - qx$, дефинирана в $(-\infty, \infty)$.

$y' = 3x^2 + 2px - q$

Нека корените на производната са x_1 и x_2. По условие те са противоположни чсила, т.е $x_1 = -x_2 \;\Rightarrow\; x_1 + x_2 = 0$ и $x_1 x_2 < 0$.

Тогава от формулите на Виет имаме:

$$\left| \begin{array}{l} -\dfrac{2p}{3} = 0 \\ -\dfrac{q}{3} < 0 \end{array} \right. \;\Rightarrow\; p = 0,\; q > 0.$$

$$\Rightarrow\; y' = 3x^2 - q,\quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{q},\quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{q} \quad \text{и} \quad y_{\max} = y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{q}\right),\; y_{\min} = y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{q}\right).$$

По условие $y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{q}\right) - y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{q}\right) = 4$ (1)

Тъй като $p = 0$, то $y = x^3 - qx \;\Rightarrow\; x_1^3 - qx_1 - x_2^3 + qx_2 = 4$.

Получаваме уравнението:

$$-\frac{1}{3\sqrt{3}} q\sqrt{q} + \frac{1}{\sqrt{3}} q\sqrt{q} - \frac{1}{3\sqrt{3}} q\sqrt{q} + \frac{1}{\sqrt{3}} q\sqrt{q} = 4$$

$$q\sqrt{q} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} + 1\right) = 4$$

$$q\sqrt{q} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{3} = 4$$

$$q\sqrt{q} = 3\sqrt{3},\quad q = 3.$$

Окончателно $p = 0$, $q = 3$.

Директно се проверява, че функцията $y = x^3 - 3x$ изпълнява условието на задачата.

25. $y = \frac{1}{4}x^3 + mx^2 + nx + 2$, дефинирана в $(-\infty, \infty)$.

$$y' = \frac{3}{4}x^2 + 2mx + n$$

$$y'' = \frac{3}{2}x + 2m$$

За $x = 2$ функцията има локален минимум, равен на -2.

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} y'(2) = 0 \\ y(2) = -2 \end{array} \right. \text{ и } y''(2) > 0 \;\Leftrightarrow\; \left| \begin{array}{l} 3 + 4m + n = 0 \\ 2 + 4m + 2n + 2 = -2 \end{array} \right. \text{ и } 3 + 2m > 0.$$

$$\left| \begin{array}{l} 4m + n + 3 = 0 \\ 2m + n + 3 = 0 \end{array} \right. \;\Leftrightarrow\; m = 0,\; n = -3 \text{ и е изпълнено условието } y''(2) > 0.$$

Функцията приема вида $y = \frac{1}{4}x^3 - 3x + 2$.

$y' = \frac{3}{4}x^2 - 3 = \frac{3}{4}(x^2 - 4) = 0$.

Функцията расте в $(-\infty,-2)$, намалява е $(-2,2)$, расте в $(2,\infty)$.

$y_{\max} = y(-2) = 6$, $y_{\min} = y(2) = -2$.

$y'' = \frac{3}{2}x$.

Функцията е вдлъбната в $(-\infty,0)$, изпъкнала в $(0,\infty)$, инфлексна точка $(0,2)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \infty$.

26. $y = x^3 + mx^2 + nx + 2$, дефинирана в $(-\infty,\infty)$.

$y' = 3x^2 + 2mx + n$

$y'' = 6x + 2m$.

За $x = -1$ функцията има локален максимум, равен на 4.

$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} y'(-1) = 0 \\ y(-1) = 4 \end{array} \right.$ и $y''(-1) < 0$ $\Leftrightarrow$ $\left| \begin{array}{l} -2m + n + 3 = 0 \\ m - n - 3 = 0 \end{array} \right.$ и $2m - 6 < 0$.

$m = 0$, $n = -3$ и е изпълнено условието $y''(-1) < 0$.

Функцията приема вида $y = x^3 - 3x + 2$.

$y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0$.

Функцията расте в $(-\infty,-1)$, намалява е $(-1,1)$, расте в $(1,\infty)$.

$y_{\max} = y(-1) = 4$, $y_{\min} = y(1) = 0$.

$y'' = 6x$.

Функцията е вдлъбната в $(-\infty,0)$, изпъкнала в $(0,\infty)$, инфлексна точка $(0,2)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \infty$.