1.9. Изследване на полиномна функция. Графика

2. а) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 2$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3(x^2 - 2x + 2) = 0$ – няма реални корени, $f'(x) > 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow$ $f(x)$ е растяща в $(-\infty, \infty)$, няма локални екстремуми.

$f''(x) = 6(x-1) = 0$, $x = 1$

$\Rightarrow$ при $x = 1$ $f(x)$ има инфлексия и $f(1) = 2$; вдлъбната е в $(-\infty, 1)$ и изпъкнала е $(1, +\infty)$.

Пресмятаме $f(0) = -2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

б) $f(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^2 + 3$, функцията е четна.

$f'(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = 0$, $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.

Имаме $f(-2) = f(2) = -1$.

$f_{\min} = f(-2) = -1$, $f_{\max} = f(0) = 3$ и $f_{\min} = f(2) = -1$.

$f''(x) = 3x^2 - 4 = 0$, $x_1 = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ и $x_2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

$f(x)$ има инфлексия при x_1 и x_2.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

x	$-\infty$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\underset{\min}{-1}$	$\nearrow$	$\underset{\max}{3}$	$\searrow$	$\underset{\min}{-1}$	$\nearrow$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\cup$	инфл.	$\cap$	инфл.	$\cup$	$+\infty$

в) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x-1)(x-2)$.

$f_{\min} = f(0) = 2$, $f_{\max} = f(1) = 3$, $f_{\min} = f(2) = 2$.

$f''(x) = 4(3x^2 - 6x + 2) = 0$, $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$ и $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$.

$f(x)$ има инфлексия при $x = x_1$ и $x = x_2$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$	0	x_1	1	x_2	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\underset{\min}{2}$	$\nearrow$	$\underset{\max}{3}$	$\searrow$	$\underset{\min}{2}$	$\nearrow$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\cup$	инфл.	$\cap$	инфл.	$\cup$	$+\infty$

г) $f(x)=\dfrac{x^5}{5}-\dfrac{3x^4}{4}+2x^2$

$f'(x)=x^4-3x^3+4x=x(x+1)(x-2)^2=0$, $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=2$

$f''(x)=4x^3-9x^2+4=(x-2)(4x^2-x-2)=0$, $x_1=\dfrac{1-\sqrt{33}}{8}$, $x_2=\dfrac{1+\sqrt{33}}{8}$, $x_3=2$.

Пресмятаме $f_{\max}=f(-1)=\dfrac{21}{20}$, $f_{\min}=f(0)=0$, $f(2)=2\dfrac{2}{5}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

x	$-\infty$	-1	x_1	0	x_2		2		$+\infty$
$f'(x)$	+	0	–	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	↗	$\frac{21}{20}$ max	↘	0 min	↗				
$f''(x)$		–	0	+	0	–	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\cap$	инфл.	$\cup$	инфл.	$\cap$	$2\frac{2}{5}$ инфл.	$\cup$	$+\infty$

д) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{6}-2x^2-2x$

$f'(x)=x^3+\dfrac{x^2}{2}-4x-2=(x+\dfrac{1}{2})(x^2-4)=0$, $x_1=-2$, $x_2=-\dfrac{1}{2}$, $x_3=2$.

$f''(x)=3x^2+x-4=0$, $x_1=-\dfrac{4}{3}$, $x_2=1$.

Пресмятаме $f_{\min}=f(-2)=-\dfrac{4}{3}$, $f_{\max}=f(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{95}{192}$, $f_{\min}=f(2)=-\dfrac{20}{3}$, $f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{2}$	1	-2	$+\infty$
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$f(x)$	↘	$-\frac{4}{3}$ min	↗	$\frac{95}{192}$ max	↘	$-\frac{20}{3}$ min	↗
$f''(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\cup$	$-\frac{40}{81}$ инфл.	$\cap$	$-\frac{43}{12}$ инфл.	$\cup$	$+\infty$

е) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{13x^2}{4}-3x$

$f'(x)=x^3-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{13x}{2}-3=(x+2)(x+\dfrac{1}{2})(x-3)=0$, корени $-2,\ -\dfrac{1}{2},\ 3.$

$f''(x)=3x^2-x-\dfrac{13}{2}=\dfrac{1}{2}(6x^2-2x-13)=0,\ x_1=\dfrac{1-\sqrt{79}}{6},\ x_2=\dfrac{1+\sqrt{79}}{6}.$

Пресмятаме $f_{\min}=f(-2)=-\dfrac{5}{3},\ f_{\max}=f(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{139}{192},\ f_{\min}=f(3)=-\dfrac{45}{2},\ f(0)=0$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$

x	$-\infty$	-2	x_1	$-\frac{1}{2}$	x_2	3	$+\infty$
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$ min	$\nearrow$	$\frac{139}{192}$ max	$\searrow$	$-\frac{45}{2}$ min	$\nearrow$
$f''(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\cup$	инфл.	$\cap$	инфл.	$\cup$	$+\infty$

ж) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{3x^2}{4}-x$

$f'(x)=x^3+\dfrac{3x^2}{2}-\dfrac{3x}{2}-1=(x+2)(x+\dfrac{1}{2})(x-1)=0$

$f''(x)=\dfrac{3}{2}(2x^2+2x-1)=0,\ x_1=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2},\ x_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}.$

Пресмятаме $f_{\min}=f(-2)=-1,\ f_{\max}=f(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{17}{64},\ f_{\min}=f(1)=-1,\ f(0)=0.$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$

x	$-\infty$	-2	x_1	$-\frac{1}{2}$	x_2	1	$+\infty$
$f'(x)$	–	0	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-1 min	$\nearrow$	$\frac{17}{64}$ max	$\searrow$	-1 min	$\nearrow$
$f''(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\cup$	инфл.	$\cap$	инфл.	$\cup$	$+\infty$

з) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{5x^3}{6}-\dfrac{x^2}{4}-3x$

$f'(x)=x^3+\dfrac{5x^2}{2}-\dfrac{x}{2}-3=(x+2)(x+\dfrac{3}{2})(x-1)=0$.

$f''(x)=\dfrac{1}{2}(6x^2+10x-1)=0$, $x_1=\dfrac{-5-\sqrt{31}}{6}$, $x_2=\dfrac{-5+\sqrt{31}}{6}$.

Пресмятаме

$f_{\min}=f(-2)=\dfrac{7}{3}$, $f_{\max}=f(-\dfrac{3}{2})=\dfrac{153}{64}=2\dfrac{25}{64}$, $f_{\min}=f(1)=-\dfrac{13}{6}=-2\dfrac{1}{6}$, $f(0)=0$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$

x	$-\infty$	-2	x_1	$-\dfrac{3}{2}$	x_2	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{7}{3}$ min	$\nearrow$	$\frac{153}{64}$ max	$\searrow$	$-\frac{13}{6}$ min	$\nearrow$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\cup$	инфл.	$\cap$	инфл.	$\cup$	$+\infty$

и) $f(x)=3x^2-4-x^3$

$f'(x)=6x-3x^2=3x(2-x)=0$.

$f''(x)=6-6x=6(1-x)=0$.

$f_{\min}=f(0)=-4$, $f_{\max}=f(2)=0$, $f(1)=-2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-4 min	$\nearrow$	0 max	$\searrow$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\cup$	-2 инфл.	$\cap$	$-\infty$

к) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{5x^2}{4}+x$

$f'(x)=x^3+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{5x}{2}+1=(x+2)(x-\dfrac{1}{2})(x-1)=0$.

$f''(x)=\dfrac{1}{2}(6x^2+2x-5)=0$, $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{31}}{6}$, $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{31}}{2}$.

Пресмятаме $f_{\min}=f(-2)=-\dfrac{13}{3}=-4\dfrac{1}{3}$, $f_{\max}=f(\dfrac{1}{2})=\dfrac{43}{192}$, $f_{\min}=f(1)=\dfrac{1}{6}$, $f(0)=0$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$.

x	$-\infty$	-2	x_1	$\frac{1}{2}$	x_2	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{13}{3}$ min	$\nearrow$	$\frac{43}{192}$ max	$\searrow$	$\frac{1}{6}$ min	$\nearrow$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\cup$	инфл.	$\cap$	инфл.	$\cup$	$+\infty$

л) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^3}{3}-x^2$

$f'(x)=x^3+x^2-2x=x(x+2)(x-1)=0$.

$f''(x)=3x^2+2x-2=0$, $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{7}}{3}$, $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$.

$f_{\min}=f(-2)=-\dfrac{8}{3}=-2\dfrac{2}{3}$, $f_{\max}=f(0)=0$, $f_{\min}=f(1)=-\dfrac{5}{12}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$.

x	$-\infty$	-2	x_1	0	x_2	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{8}{3}$ min	$\nearrow$	0 max	$\searrow$	$-\frac{5}{12}$ min	$\nearrow$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\cup$	инфл.	$\cap$	инфл.	$\cup$	$+\infty$

м) $f(x)=\dfrac{x^4}{4}+\dfrac{x^2}{2}$

$f'(x)=x^3+x=x(x^2+1)=0$

$f''(x)=3x^2+1>0,\quad \forall x$, няма инфлексни точки.

$f_{\min}=f(0)=0$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\underset{\min}{0}$	$\nearrow$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$\cup$	$+\infty$

н) $f(x)=(x-1)^2(x-2)^2$

$f'(x)=2(x-1)(2x-3)(x-2)=0$

$f''(x)=2(6x^2-18x+13)=0$, $x_1=\dfrac{9-\sqrt{3}}{6}$, $x_2=\dfrac{9+\sqrt{3}}{6}$

$f_{\min}=f(1)=0$, $f_{\max}=f(\frac{3}{2})=\dfrac{1}{16}$, $f_{\min}=f(2)=0$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$.

x	$-\infty$	1	x_1	$\frac{3}{2}$	x_2	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\underset{\min}{0}$	$\nearrow$	$\underset{\max}{\frac{1}{16}}$	$\searrow$	$\underset{\min}{0}$	$\nearrow$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\cup$	инфл.	$\cap$	инфл.	$\cup$	$+\infty$

3. $f(x)=\dfrac{x^5}{5}-x^3+2x$

Последователно намираме:

$f'(x)=x^4-3x^2+2$

$f''(x)=4x^3-6x$

$f'''(x)=12x^2-6$

$f^{IV}(x)=24x$

а) $f'^{v}(x)=24x$ – права през $(0,0)$.

б) $f'''(x)=12x^2-6$ – парабола с връх в точката $(0,-6)$.

в) $f''(x)=4x^3-6x=x(4x^2-6)$ – нечетна функция. Пресича оста Ox в точките $-\frac{\sqrt{6}}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Производната ѝ е $f'''(x)=12x^2-6=6(2x^2-1)=0$ с корени $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow$ $f''_{\max}=f''(-\frac{\sqrt{2}}{2})=2\sqrt{2}$, $f''_{\min}=f''(\frac{\sqrt{2}}{2})=-2\sqrt{2}$.

Втората ѝ производна е $f^{IV}(x)=24x$ с корен $(0,0)$ – инфлексна точка на f''.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f''(x)=\pm\infty$.

г) $f'(x)=x^4-3x^2+2$ – четна функция.

Производната ѝ е $f''(x)=4x^3-6x=x(4x^2-6)=0$ с корени $-\frac{\sqrt{6}}{2}$, 0, $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

$\Rightarrow$ $f'_{\min}=f'(-\frac{\sqrt{6}}{2})=f'_{\min}=f'(\frac{\sqrt{6}}{2})=-\frac{1}{4}$, $f'_{\max}=f'(0)=2$.

Втората ѝ производна е $f'''(x)=12x^2-6=6(2x^2-1)=0$ с корени $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow$ инфлексни точки $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{4}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{4}\right)$.

д) $f(x)=\frac{x^5}{5}-x^3+2x$ – нечетна функция

Производната ѝ е $f'(x)=x^4-3x^2+2=(x+\sqrt{2})(x+1)(x-1)(x-\sqrt{2})=0$

$\Rightarrow$ $f_{\max}=f(-\sqrt{2})=-\frac{4\sqrt{2}}{5}$, $f_{\min}=f(-1)=-\frac{6}{5}$, $f_{\max}=f(1)=\frac{6}{5}$, $f_{\min}=f(\sqrt{2})=\frac{4\sqrt{2}}{5}$.

Втората ѝ производна е $f''(x)=4x^3-6x=x(4x^2-6)=0$.

$\Rightarrow$ инфлексни точки $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},-\frac{19\sqrt{6}}{40}\right)$, $(0,0)$, $\left(\frac{\sqrt{6}}{2},\frac{19\sqrt{6}}{40}\right)$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$.

1.10. Изследване на дробно-линейна функция

2 а) $f(x)=\dfrac{2x+2}{x-1}$, дефинирана при $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{-4}{(x-1)^2}<0,\ \ \forall x\ \Rightarrow\ \ f(x)$ намалява в $(-\infty,1)$ и в $(1,+\infty)$.

$f(x)$ няма локални екстремуми.

$f''(x)=\dfrac{8}{(x-1)^3}\neq 0$

$\Rightarrow\ \ f(x)$ няма инфлексни точки, в $(-\infty,1)$ е вдлъбната, в $(1,+\infty)$ е изпъкнала.

$\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{2x+2}{x-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{2x+2}{x-1}=+\infty\ \ \Rightarrow\ \ x=1$ е вертикална асимптота при $x\to 1$ отляво и отдясно.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+2}{x-1}=2\ \Rightarrow\ \ y=2$ е хоризонтална асимптота при $x\to\pm\infty$.

Намираме:

$f(0)=-2$, и $f(x)=0$ при $x=-1$.

Попълваме резултатите в таблица.

x	$-\infty$	-1		0	$1-$	$1+$		$+\infty$
$f'(x)$			$-$				$-$	
$f(x)$			$\searrow$				$\searrow$	
$f''(x)$			$-$				$+$	
$f(x)$	2	0	$\cap$	-2	$-\infty$	$+\infty$	$\cup$	2

б) $f(x)=\dfrac{x-5}{x-4}$, дефинирана при $x\in(-\infty,4)\cup(4,+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{1}{(x-4)^2}>0,\ \ \forall x\ \Rightarrow\ \ f(x)$ расте в $(-\infty,4)$ и в $(4,+\infty)$.

$f(x)$ няма локални екстремуми.

$f''(x)=\dfrac{-2}{(x-4)^3}\neq 0$

$\Rightarrow\ \ f(x)$ няма инфлексни точки, в $(-\infty,4)$ е изпъкнала , в $(4,+\infty)$ е вдлъбната.

$\lim\limits_{x\to 4-}\dfrac{x-5}{x-4}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 4+}\dfrac{x-5}{x-4}=-\infty\ \ \Rightarrow\ \ x=4$ е вертикална асимптота при $x\to 4$ отляво и отдясно.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-5}{x-4}=1\ \Rightarrow\ \ y=1$ е хоризонтална асимптота при $x\to\pm\infty$.

Намираме:

$f(0)=\dfrac{5}{4}$, и $f(x)=0$ при $x=5$.

Попълваме резултатите в таблица.

x	$-\infty$		0	$4-$	$4+$	5		$+\infty$
$f'(x)$		$+$					$+$	
$f(x)$		$\nearrow$					$\nearrow$	
$f''(x)$		$-$					$+$	
$f(x)$	1	$\cup$	$\frac{5}{4}$	$+\infty$	$-\infty$	0	$\cap$	1

в) $f(x)=\dfrac{3x+7}{x+2}$, дефинирана при $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{-1}{(x+2)^2}<0,\quad \forall x \ \Rightarrow \ f(x)$ намалява в $(-\infty,-2)$ и в $(-2,+\infty)$.

$f(x)$ няма локални екстремуми.

$f''(x)=\dfrac{2}{(x+2)^3}\neq 0$

$\Rightarrow$ $f(x)$ няма инфлексни точки, в $(-\infty,-2)$ е вдлъбната, в $(-2,+\infty)$ е изпъкнала.

$\lim\limits_{x\to-2-}\dfrac{3x+7}{x+2}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-2+}\dfrac{3x+7}{x+2}=+\infty \ \Rightarrow \ x=-2$ е вертикална асимптота при $x\to-2$ отляво и отдясно.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x+7}{x+2}=3 \ \Rightarrow \ y=3$ е хоризонтална асимптота при $x\to\pm\infty$.

Намираме:

$f(0)=\dfrac{7}{2}$, и $f(x)=0$ при $x=-\dfrac{7}{3}$.

Попълваме резултатите в таблица.

x	$-\infty$	$-\frac{7}{3}$		$-2-$	$-2+$	0		$+\infty$
$f'(x)$			$-$				$-$	
$f(x)$			$\searrow$				$\searrow$	
$f''(x)$			$-$				$+$	
$f(x)$	3	0	$\cap$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{7}{2}$	$\cup$	3

г) $f(x)=\dfrac{4x+1}{2+3x}$, дефинирана при $x\in(-\infty,-\frac{2}{3})\cup(-\frac{2}{3},+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{5}{(2+3x)^2}>0,\ \ \forall x\ \Rightarrow\ f(x)$ расте в $(-\infty,-\frac{2}{3})$ и в $(-\frac{2}{3},+\infty)$.

$f(x)$ няма локални екстремуми.

$f''(x)=\dfrac{-30}{(2+3x)^3}\neq 0$

$\Rightarrow\ f(x)$ няма инфлексни точки, в $(-\infty,-\frac{2}{3})$ е изпъкнала , в $(-\frac{2}{3},+\infty)$ е вдлъбната.

$\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}-}\dfrac{4x+1}{2+3x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to4+}\dfrac{4x+1}{2+3x}=-\infty\ \Rightarrow\ x=-\dfrac{2}{3}$ е вертикална асимптота при $x\to4$ отляво и отдясно.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x+1}{2+3x}=\dfrac{4}{3}\ \Rightarrow\ y=\dfrac{4}{3}$ е хоризонтална асимптота при $x\to\pm\infty$.

Намираме:

$f(0)=\dfrac{1}{2}$, и $f(x)=0$ при $x=-\dfrac{1}{4}$.

Попълваме резултатите в таблица.

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}-$	$-\frac{2}{3}+$	$-\frac{1}{4}$	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$					$+$	
$f(x)$		$\nearrow$					$\nearrow$	
$f''(x)$		$-$					$+$	
$f(x)$	$\frac{4}{3}$	$\cup$	$+\infty$	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	$\cap$	$\frac{4}{3}$

д) $f(x)=\dfrac{5-x}{x+3}$, дефинирана при $x\in(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{-8}{(x+3)^2}<0,\ \ \forall x\ \Rightarrow\ f(x)$ намалява в $(-\infty,-3)$ и в $(-3,+\infty)$.

$f(x)$ няма локални екстремуми.

$f''(x)=\dfrac{16}{(x+3)^3}\neq 0$

$\Rightarrow\ f(x)$ няма инфлексни точки, в $(-\infty,-3)$ е вдлъбната, в $(-3,+\infty)$ е изпъкнала.

$\lim\limits_{x\to-3-}\dfrac{5-x}{x+3}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-3+}\dfrac{5-x}{x+3}=+\infty\ \Rightarrow\ x=-3$ е вертикална асимптота при $x\to-3$ отляво и отдясно.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5-x}{x+3}=-1\ \Rightarrow\ y=-1$ е хоризонтална асимптота при $x\to\pm\infty$.

Намираме:

$f(0)=\dfrac{5}{3}$, и $f(x)=0$ при $x=5$.

Попълваме резултатите в таблица.

x	$-\infty$		$-3-$	$-3+$	0	5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$					$-$	
$f(x)$		$\searrow$					$\searrow$	
$f''(x)$		$-$					$+$	
$f(x)$	-1	$\cap$	$-\infty$	$+\infty$	$\frac{5}{3}$	0	$\cup$	-1

е) $f(x)=\dfrac{6x+5}{-3x-2}$, дефинирана при $x\in(-\infty,-\frac{2}{3})\cup(-\frac{2}{3},+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{3}{(3x+2)^2}>0,\ \ \forall x \ \Rightarrow\ f(x)$ расте в $(-\infty,-\frac{2}{3})$ и в $(-\frac{2}{3},+\infty)$.

$f(x)$ няма локални екстремуми.

$f''(x)=\dfrac{-18}{(3x+2)^3}\neq 0$

$\Rightarrow\ f(x)$ няма инфлексни точки, в $(-\infty,-\frac{2}{3})$ е изпъкнала , в $(-\frac{2}{3},+\infty)$ е вдлъбната.

$\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}-}\dfrac{6x+5}{-3x-2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}+}\dfrac{6x+5}{-3x-2}=-\infty\ \Rightarrow\ x=-\dfrac{2}{3}$ е вертикална асимптота при $x\to-\dfrac{2}{3}$ отляво и отдясно.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{6x+5}{-3x-2}=-2\ \Rightarrow\ y=-2$ е хоризонтална асимптота при $x\to\pm\infty$.

Намираме:

$f(0)=-\dfrac{5}{2}$, и $f(x)=0$ при $x=-\dfrac{5}{6}$.

Попълваме резултатите в таблица.

x	$-\infty$		$-\frac{5}{6}$	$-\frac{2}{3}-$	$-\frac{2}{3}+$	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$					$+$	
$f(x)$		$\nearrow$					$\nearrow$	
$f''(x)$		$+$					$-$	
$f(x)$	-2	$\cup$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$\cap$	-2

ж) $f(x)=\dfrac{x-2}{-x+1}$, дефинирана при $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{-1}{(-x+1)^2}<0,\ \ \forall x\ \Rightarrow\ f(x)$ намалява в $(-\infty,1)$ и в $(1,+\infty)$.

$f(x)$ няма локални екстремуми.

$f''(x)=\dfrac{-2}{(-x+1)^3}=\dfrac{2}{(x-1)^3}\neq 0$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ няма инфлексни точки, в $(-\infty,1)$ е вдлъбната, в $(1,+\infty)$ е изпъкнала.

$\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{x-2}{-x+1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{x-2}{-x+1}=+\infty$ $\Rightarrow$ $x=1$ е вертикална асимптота при $x\to 1$ отляво и отдясно.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-2}{-x+1}=-1$ $\Rightarrow$ $y=-1$ е хоризонтална асимптота при $x\to\pm\infty$.

Намираме:

$f(0)=-2$, и $f(x)=0$ при $x=2$.

Попълваме резултатите в таблица.

x	$-\infty$		$1-$	$1+$	0	2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$					$-$	
$f(x)$		$\searrow$					$\searrow$	
$f''(x)$		$-$					$+$	
$f(x)$	-1	$\cap$	$-\infty$	$+\infty$	-2	0	$\cup$	-1

з) $f(x)=\dfrac{2-x}{2x-6}$, дефинирана при $x\in(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$

$f'(x)=\dfrac{2}{(2x-6)^2}>0,\ \ \forall x$ $\Rightarrow$ $f(x)$ расте в $(-\infty,3)$ и в $(3,+\infty)$.

$f(x)$ няма локални екстремуми.

$f''(x)=\dfrac{-8}{(2x-6)^3}\neq 0$

$\Rightarrow$ $f(x)$ няма инфлексни точки, в $(-\infty,3)$ е изпъкнала , в $(3,+\infty)$ е вдлъбната.

$\lim\limits_{x\to 3-}\dfrac{2-x}{2x-6}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 3+}\dfrac{2-x}{2x-6}=-\infty$ $\Rightarrow$ $x=3$ е вертикална асимптота при $x\to 3$ отляво и отдясно.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2-x}{2x-6}=-\dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $y=-\dfrac{1}{2}$ е хоризонтална асимптота при $x\to\pm\infty$.

Намираме:

$f(0)=-\dfrac{1}{3}$, и $f(x)=0$ при $x=2$.

Попълваме резултатите в таблица.

x	$-\infty$		0	2	$3-$	$3+$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$					$+$	
$f(x)$		$\nearrow$					$\nearrow$	
$f''(x)$		$+$					$-$	
$f(x)$	$-\dfrac{1}{2}$	$\cup$	$-\dfrac{1}{3}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$\cap$	$-\dfrac{1}{2}$

3. $f(x)=7\ln(x-2)+3x$ при $x>2$.

а) $f'(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}\neq 0$ при $x>2$ $\Rightarrow$ $f(x)$ няма локални екстремуми.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\left(7\ln(x-2)+3x\right)=-\infty$ $\Rightarrow$ $x=2$ е вертикална асимптота при $x\to 2$, $x>2$.

б) $f'(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$, $x>2$.

Първата производна на $f'(x)$ е $f''(x)=\dfrac{-7}{(x-2)^2}<0$ $\Rightarrow$ $f'(x)$ е намаляваща в $(2,+\infty)$ и няма локални екстремуми.

Втората производна на $f'(x)$ е $f'''(x)=\dfrac{14}{(x-2)^3}>0$ в $(2,+\infty)$ $\Rightarrow$ $f'(x)$ е изпъкнала в $(2,+\infty)$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}=\dfrac{3x+1}{x-2}=+\infty$ $\Rightarrow$ $x=2$ е вертикална асимптота при $x\to 2$, $x>2$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}=\dfrac{3x+1}{x-2}=3$ $\Rightarrow$ $y=3$ е хоризонтална асимптота при $x\to+\infty$.

$f'(0)\notin(2,+\infty)$, $f'(x)\neq 0$ при $x>2$.

Попълваме резултатите в таблица.

x	$2+$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	
$f'(x)$		$\searrow$	
$f'''(x)$		$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\cup$	3

4. Дадена е функцията $f(x)=8\ln(x+3)-x+5$ при $x>-3$.

а) $f'(x)=\dfrac{5-x}{x+3}$ при $x>-3$.

Около точката $x=5\in(-3,+\infty)$ $f'(x)$ си сменя знака от + на – $\Rightarrow$ $f(x)$ има локален максимум и $f_{\max}=f(5)=24\ln 2$.

$\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x>-3}}\left(8\ln(x+3)-x+5\right)=-\infty$ $\Rightarrow$ $x=-3$ е вертикална асимптота при $x\to -3$, $x>-3$.

б) $f'(x)=\dfrac{5-x}{x+3}$, $x>-3$.

Първата производна на $f'(x)$ е $f''(x)=\dfrac{-8}{(x+3)^2}<0 \quad \Rightarrow f'(x)$ е намаляваща в $(-3,+\infty)$ и няма локални екстремуми.

Втората производна на $f'(x)$ е $f'''(x)=\dfrac{16}{(x+3)^3}>0$ в $(-3,+\infty) \quad \Rightarrow \quad f'(x)$ е изпъкнала в $(-3,+\infty)$.

$\lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}}=\dfrac{5-x}{x+3}=+\infty \;\Rightarrow\; x=-3$ е вертикална асимптота при $x\to-3$, $x>-3$.

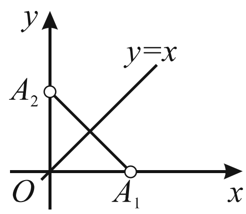
$\lim\limits_{x\to+\infty}=\dfrac{5-x}{x+3}=-1 \;\Rightarrow\; y=-1$ е хоризонтална асимптота при $x\to+\infty$.

$f'(0)=\dfrac{5}{3}$, $f'(x)=0$ при $x=5$.

Попълваме резултатите в таблица.

x	$-3+$	0	5		$+\infty$
$f''(x)$				$-$	
$f'(x)$				$\searrow$	
$f'''(x)$				$+$	
$f'(x)$	$+\infty$	$\dfrac{5}{3}$	0	$\cup$	-1

5. Ще докажем, че точките $A_1(x_1,0)$ и $A_2(0,y_2)$ са симетрични относно правата $y=x$ точно когато $x_1=y_2$.



Наистина. Нека A_1 и A_2 са симетрични относно правата $y=x \;\Rightarrow\; y=x$ е симетрала на $A_1A_2 \;\Rightarrow OA_1=OA_2 \;\Rightarrow\; x_1=y_2$.

Нека $x_1=y_2 \;\Rightarrow\; x_1$ и y_2 са с еднакви знаци $\Rightarrow$ отсечката A_1A_2 лежи в I или III квадрант и тъй като $OA_1=OA_2 \;\Rightarrow$ правата $y=x$ е симетрала на $A_1A_2 \;\Rightarrow\; A_1$ и A_2 са симетрични относно правата $y=x$.

а) $f(x)=\dfrac{2x-1}{3x-k}$;

При $-2k+3\neq0$, $k\neq\dfrac{3}{2}$ $f(x)$ е дробно-линейна функция.

Намираме пресечните точки на графиката на $f(x)$ с координатните оси.

$f(0)=\dfrac{1}{k}$, $\dfrac{2x-1}{3x-k}=0$, $x=\dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ пресечните точки на графиката с координатните оси са $\left(0,\frac{1}{k}\right)$ и $\left(\frac{1}{2},0\right)$. Те са симетрични относно правата $y=x$ точно когато $\frac{1}{k}=\frac{1}{2}$, $k=2$.

б) $f(x)=\frac{4x+k}{x-4}$;

При $-16-k\neq 0$, $k\neq -16$ $f(x)$ е добно-линейна функция.

Намираме пресечните точки на графиката на $f(x)$ с координатните оси.

$f(0)=-\frac{k}{4}$, $\frac{4x+k}{x-4}=0$, $x=-\frac{k}{4}$.

$\Rightarrow$ пресечните точки

на графиката с координатните оси са $\left(0,-\frac{k}{4}\right)$ и $\left(-\frac{k}{4},0\right)$. Те са симетрични относно правата $y=x$ при всяко $k\neq -16$.

в) $f(x)=\frac{x-k}{kx-2}$;

При $k\neq 0$ и $-2+k^2\neq 0$, т.е. при $k\neq 0,\ k\neq \pm\sqrt{2}$ $f(x)$ е добно-линейна функция.

Намираме пресечните точки на графиката на $f(x)$ с координатните оси.

$f(0)=\frac{k}{2}$, $\frac{x-k}{kx-2}=0$, $x=k$.

$\Rightarrow$ пресечните точки на графиката с координатните оси са $\left(0,\frac{k}{2}\right)$ и $(k,0)$. Те са симетрични относно правата $y=x$ точно когато $\frac{k}{2}=k$. Последното уравнение за k няма решение $\Rightarrow$ няма стойности на k, за които пресечните точки на графиката на $f(x)$ с координатните оси са симетрични относно правата $y=x$.

г) $f(x)=\frac{kx+1}{kx-7}$.

При $k\neq 0$ и $-7k-k\neq 0$, т.е. $k\neq 0$ $f(x)$ е добно-линейна функция.

Намираме пресечните точки на графиката на $f(x)$ с координатните оси.

$f(0)=-\frac{1}{7}$, $\frac{kx+1}{kx-7}=0$, $x=-\frac{1}{k}$.

$\Rightarrow$ пресечните точки на графиката с координатните оси са $\left(0,-\frac{1}{7}\right)$ и $\left(-\frac{1}{k},0\right)$. Те са симетрични относно правата $y=x$ точно когато $-\frac{1}{7}=-\frac{1}{k}$, $k=7$.

6. При $-k+1\neq 0$, $k\neq 1$ $f(x)$ е дробно-линейна функция.

$$\lim_{\substack{x\to k\\ x<k}}\frac{x-1}{x-k}=\begin{cases}+\infty, & \text{при } k<1\\ -\infty, & \text{при } k>1\end{cases}.$$

$\Rightarrow$ правата $x=k$ е вертикална асимптота при $x\to k$, $x<k$.

Пресмятаме $f'(x)=\dfrac{-k+1}{(x-k)^2}$ и $f''(x)=\dfrac{2(k-1)}{(x-k)^3}$.

а) Нека $x<k$. $f(x)$ е изпъкнала точно когато $f''(x)=\dfrac{2(k-1)}{(x-k)^3}>0$, $k<1$.

б) Нека $x<k$. $f(x)$ е вдлъбната точно когато $f''(x)=\dfrac{2(k-1)}{(x-k)^3}<0$, $k>1$.