## *1.6. Изпъкналост и вдлъбнатост на функция. Инфлексни точки*

**2.** а) $f(x)=3x^5-20x^4+10x^3+180x^2+60x+1$

$f'(x)=15x^4-80x^3+30x^2+360x+60$

| $f''$: | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $-$ | | $+$ | | $-$ | | $+$ | |

$f''(x)=60x^3-240x^2+60x+360=60(x^3-4x^2+x+6)=60(x+1)(x-2)(x-3)$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ е вдлъбната в $(-\infty,-1)$, изпъкнала в $(-1,2)$, вдлъбната в $(2,3)$ и изпъкнала в $(3,+\infty)$.

б) $f(x)=x^4+2x^3+6x^2+12x+1$.

$f'(x)=4x^3+6x^2+12x+12$

$f''(x)=12x^2+12x+12=12(x^2+x+1)>0, \quad \forall x$ .

$\Rightarrow$ $f(x)$ е изпъкнала в $(-\infty,+\infty)$.

в) $f(x)=-x^4-10x^3-36x^2+12x+12$.

| $f''$: | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $-$ | | $+$ | | $-$ | |

$f'(x)=-4x^3-30x^2-72x+12$

$f''(x)=-12x^2-60x-72=-12(x^2+5x+6)=-12(x+2)(x+3)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ е вдлъбната в $(-\infty,-3)$, изпъкнала в $(-3,-2)$ и вдлъбната в $(-2,+\infty)$.

**3.** а) $f(x)=2x^3+3x^2+6x+1$;

$f'(x)=6x^2+6x+6$

$f''(x)=12x+6=0$, $x=-\dfrac{1}{2}$

При $x<-\dfrac{1}{2}$ $\;f''(x)<0$ и при $x>-\dfrac{1}{2}$ $\;f''(x)>0$ $\;\Rightarrow$ при $x=-\dfrac{1}{2}$ $f(x)$ има инфлексия.

б) $f(x)=x^4+6x^2+12x+1$;

$f'(x)=4x^3+12x+12$

$f''(x)=12x^2+12\neq 0, \quad \forall x \quad \Rightarrow \quad f(x)$ няма инфлексни точки.

в) $f(x)=x^4-6x^3+12x^2+12x+1$.

$f'(x)=4x^3-18x^2+24x+12$

$f''(x)=12x^2-36x+24=12(x^2-3x+2)=12(x-1)(x-2)$

Определяме знака на квадратния тричлен и намираме, че $f(x)$ има инфлексни точки при $x=1$ и $x=2$.

**5.** а) $f(x)=x^4+5x^3+6x^2-4x-8$;

За да намерим екстерумите, изследваме първата производна.

$f'(x)=4x^3+15x^2+12x-4=(x+2)^2(4x-1)=0$

Корените на първата производна са $x_1=-2$ и $x_2=\frac{1}{4}$.

Около точката $x_1=-2$ $f'(x)$ не си сменя знака $\Rightarrow$ $f(x)$ няма локален екстремум в тази точка.

Около точката $x_2=\frac{1}{4}$ $f'(x)$ си сменя знака от $-$ на $+$ $\Rightarrow$ $f(x)$ има локален минимум в тази точка и $f_{\min}=f(\frac{1}{4})=-8\frac{139}{256}$

За да намерим инфлексните точки изследваме втората производна.

$f''(x)=12x^2+30x+12=12(x+2)(x+\frac{1}{2})=0$

Корените на втората производна са $x_1=-2$ и $x_2=-\frac{1}{2}$.

$f(x)$ има инфлексия в точките $-2$ и $\frac{1}{2}$.

Попълваме резултатите в таблица.

| $x$ | $-\infty$ | $-2$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $\frac{1}{4}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | инфл. т. | $\searrow$ | инфл. т. | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

б) $f(x)=x^3-2x^2-7x-3$.

Намираме първата производна и корените ѝ.

$f'(x)=3x^2-4x-7=3(x+1)(x-\frac{7}{3})=0$

$\Rightarrow$ $f_{\max}=f(-1)=1$ и $f_{\min}=f(\frac{7}{3})=-\frac{473}{27}$.

Намираме втората производна и корените ѝ.

$f''(x)=6x-4=2(3x-2)=0$, $x=\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $f(x)$ е вдлъбната в $(-\infty,\frac{2}{3})$, изпъкнала в $(\frac{2}{3},+\infty)$ и има инфлексна точка $\left(\frac{2}{3},-\frac{223}{27}\right)$.

в) $f(x)=\dfrac{x}{1+2x^2}$, дефинирана за всяко $x$

Намираме първата производна и корените ѝ.

$f'(x)=\dfrac{1-2x^2}{(1+2x^2)^2}=0$, $x_{1,2}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow\ f_{\min}=f(-\dfrac{\sqrt{2}}{2})=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ и $f_{\max}=f(\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

Намираме втората производна и корените ѝ.

$f''(x)=\dfrac{4x(2x^2-3)}{(1+2x^2)^2}=0$, $x_1=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}$, $x_2=0$ и $x_3=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ е вдлъбната в $(-\infty,-\dfrac{\sqrt{6}}{2})$, изпъкнала в $(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},0)$, вдлъбната в $(0,\dfrac{\sqrt{6}}{2})$ и изпъкнала в $(\dfrac{\sqrt{6}}{2},+\infty)$, инфлексни точки $(-\dfrac{\sqrt{6}}{2},-\dfrac{\sqrt{6}}{8})$, $(0,0)$ и $(\dfrac{\sqrt{6}}{2},\dfrac{\sqrt{6}}{8})$.

### *1.7. Асимптоти*

**2.** а) $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$, дефинирана при $x\neq 1$.

Намираме лявата и дясната граница при $x\to 1$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\dfrac{x-2}{x-1}=+\infty$ и $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\dfrac{x-2}{x-1}=-\infty$ $\Rightarrow$ $f(x)$ има вертикална асимптота $x=1$ при $x\to 1$ отляво и при $x\to 1$ отдясно.

Намираме границите на функцията при $x\to\pm\infty$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1-\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}=1$ $\Rightarrow$ $y=1$ е хоризонтална асимптота при $x\to+\infty$ и при . $x\to-\infty$.

б) $f(x)=\dfrac{3x-2}{x+2}$, дефинирана при $x\neq -2$.

Последователно намираме:

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}}\frac{3x-2}{x+2}=+\infty,\ \lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}}\frac{3x-2}{x+2}=-\infty,\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-2}{x+2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(3-\frac{2}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=3.$$

$\Rightarrow$ $x=-2$ е вертикална асимптота при $x\to -2$ отляво и отдясно.

$y=3$ е хоризонтална асимптота при $x\to+\infty$ и при . $x\to-\infty$.

в) $f(x)=\dfrac{2x-3}{2x+1}$, дефинирана при $x\neq -\dfrac{1}{2}$.

Последователно намираме:

$$\lim_{\substack{x\to -\frac{1}{2}\\ x<-\frac{1}{2}}}\frac{2x-3}{2x+1}=+\infty\,,\ \lim_{\substack{x\to -\frac{1}{2}\\ x>-\frac{1}{2}}}\frac{2x-3}{2x+1}=-\infty\,,\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x-3}{2x+1}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(2-\frac{3}{x}\right)}{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}=1$$

$\Rightarrow$ $x=-\dfrac{1}{2}$ е вертикална асимптота при $x\to -\dfrac{1}{2}$ отляво и отдясно.

$y=1$ е хоризонтална асимптота при $x\to+\infty$ и при . $x\to-\infty$.

г) $f(x)=\dfrac{3x}{2-x}$, дефинирана при $x\neq 2$.

Последователно намираме:

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}}\frac{3x}{2-x}=+\infty\,,\ \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\frac{3x}{2-x}=-\infty\,,\ \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{2-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x}{x\left(\frac{2}{x}-1\right)}=-3\,.$$

$\Rightarrow$ $x=2$ е вертикална асимптота при $x\to 2$ отляво и отдясно.

$y=-3$ е хоризонтална асимптота при $x\to+\infty$ и при . $x\to-\infty$.

**3.** а) $f(x)=e^{-\frac{(x-6)^2}{4}}$, дефинирана за всяко $x$.

$$f'(x)=e^{-\frac{(x-6)^2}{4}}.\frac{6-x}{2}\,.$$

Тъй като $e^{-\frac{(x-6)^2}{4}}>0,\ \forall x$, то първата производна има единствен корен при $x=6$ и $f_{\max}=f(6)=1\ \Rightarrow\ \max\limits_{(-\infty,+\infty)}f(x)=f_{\max}=f(6)=1$.

Намираме втората производна:

$$f''(x)=e^{-\frac{(x-6)^2}{4}}.\frac{x^2-12x+34}{4}=0\,,\ \ x_1=6-\sqrt{2}\ \text{ и }\ x_2=6+\sqrt{2}\,.$$

$f(x)$ има инфлексия при $x_1=6-\sqrt{2}$ и $x_2=6+\sqrt{2}$

Намираме границата при $x\to\pm\infty$:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}e^{-\frac{(x-6)^2}{4}}=0\ \Rightarrow\ y=0$ е хоризонтална асимптота при $x\to-\infty$ и при $x\to+\infty$.

б) $f(x)=e^{-\frac{(x-4)^2}{6}}$, дефинирана за всяко $x$.

в) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$, дефинирана за всяко $x$.

**4.** $f(x)=\dfrac{3x+5}{x+d}$. Функцията е дефинирана при $x\neq -d$.

При $d=\dfrac{5}{3}$ функцията е константа $y=3$.

Нека $d\neq\dfrac{5}{3}$. Функцията има вертикална асимптота $x=-d$ и хоризонтална асимптота $y=3$.

а) Уравнението на ординатната ос е $x=0$ и то съвпада с уравнението на вертикалната асимптота $x=-d$ точно когато $d=0$.

б) Пресечната точка на вертикалната и хоризонталната асимптота е $(x=-d,\, y=3)$ Тя е във втори квадрант при $d>0$, към което трябва да добавим и условието $d\neq\dfrac{5}{3}$.

в) Точката $(x=-d,\, y=3)$ е в първи квадрант при $d<0$.

**5.** Функцията $f(x)=\dfrac{ax-1}{(a-1)x-2}$, $a\neq\pm 1$ има вертикална асимптота $x=\dfrac{2}{a-1}$ и хоризонтална асимптота $y=\dfrac{a}{a-1}$, които се пресичат в точката $\left(\dfrac{2}{a-1},\dfrac{a}{a-1}\right)$.

Определяйки знаците на координатите на пресечната точка, получаваме че:

а) точката е в първи квадрат при $a\in(1,+\infty)$;

б) точката е във втори квадрант при $a\in(-\infty,0)$;

в) точката е в трети квадрант при $a\in(0,1)$;

г) няма стойности на $a$, за които точката е в четвърти квадрант.

## *1.8. Допирателни. Допирателни към криви от втора степен*

**1) Допирателна към окръжност**

**2.** а) $x^2+y^2=8$, $(2,\,2)$

Окръжността е с център $(0,0)$ и радиус $2\sqrt{2}$ .

Уравнението на допирателната в точката $(2,\,2)$ е:

$(2-0)(x-0)+(2-0)(y-0)=8$, $\quad x+y=4$.

б) $(x-1)^2+(y-1)^2=8$, $(3,\,3)$

Окръжността е с център $(1,\,1)$ и радиус $2\sqrt{2}$ .

Уравнението на допирателната в точката $(3,\,3)$ е:

$(3-1)(x-1)+(3-1)(y-1)=8$, $\;2x-2+2y-2=8$, $\quad x+y=6$.

в) $(x+2)^2+(y-7)^2=10$, $(1,\,8)$

Окръжността е с център $(-2,\,7)$ и радиус $\sqrt{10}$.

Уравнението на допирателната в точката $(1,\,8)$ е:

$(1+2)(x+2)+(8-7)(y-7)=10$, $\quad 3x+6+y-7=10$, $\;3x+y=11$.

г) $x^2+y^2-8x+16y+60=0$, $(2,-12)$

Нормалното уравнение на окръжността е $(x-4)^2+(y+8)^2=20$.

Окръжността е с център $(4,-8)$ и радиус $2\sqrt{5}$.

Уравнението на допирателната в точката $(2,-12)$ е:

$(2-4)(x-4)+(-12+8)(y+8)=20$, $-2x+8-4y-32=20$, $x+2y=-22$

**4.** Нека $M(x_0, y_0)$ е една от допирните точки и $t$ е допирателната в тази точка.

а) $(x+2)^2+(y+10)^2=25$, $A(-3,-3)$;

$\Rightarrow$ $t$: $(x_0+2)(x+2)+(y_0+10)(y+10)=25$.

От условията, че $A$ лежи на допирателната и $M$ на окръжността, получаваме система за $x_0$, $y_0$:

$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} (x_0+2)(-3+2)+(y_0+10)(-3+10)=25 \\ (x_0+2)^2+(y_0+10)^2=25 \end{array} \right.$, чиито решения са $(1,-6)$ и $(-6,-7)$.

Уравнението на допирателната в точката $(1,-6)$ е $3x+4y+21=0$.

Уравнението на допирателната в точката $(-6,-7)$ е $4x-3y+3=0$.

б) $x^2+y^2-2x+16y+25=0$, $A(-3,-16)$;

Привеждаме уравнението в нормален вид $(x-1)^2+(y+8)^2=40$

Решаваме системата:

$\left| \begin{array}{l} (x_0-1)(-3-1)+(y_0+8)(-16+8)=40 \\ (x_0-1)^2+(y_0+8)^2=40 \end{array} \right.$.

Допирна точка $(-5,-10)$, допирателна $3x+y+25=0$.

Допирна точка $(3,-14)$, допирателна $x-3y-45=0$.

в) $(x-6)^2+(y-3)^2=37$, $A(13,-2)$.

**5.** а) $(x-1)^2+(y+3)^2=20$, $(5,-1)$, $(-1,1)$.

Координатите на пресечната точка са решение на системата, образувана от уравненията на двете допирателни.

$\left| \begin{array}{l} (5-1)(x-1)+(-1+3)(y+3)=20 \\ (-1-1)(x-1)+(1+3)(y+3)=20 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2x+y-9=0 \\ -x+2y-3=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow x=3,\ y=3$.

Пресечната точка е $(3, 3)$.

б) $x^2 + y^2 - 2x - 16y + 40 = 0$, $(-3,\ 5)$, $(4,\ 4)$;

в) $x^2 + y^2 - 10y = 0$, $(-3,\ 9)$, $(-4,\ 2)$;

г) $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 20$, $(4,\ 9)$, $(-2,\ 3)$.

**7.** а) $x^2 + y^2 = 50$, $5x + 5y - 12 = 0$.

Нека точка $M(x_0, y_0)$ е допирната точка на една от търсените допирателни към окръжността.

Допирателната в точката $M$ е правата $x_0 x + y_0 y = 50$, която е успоредна на $5x + 5y - 12 = 0$

$\Rightarrow\ \dfrac{x_0}{5} = \dfrac{y_0}{5}\ \Rightarrow\ x_0 = y_0$.

Точката $M$ лежи на окръжността $\Rightarrow$ $x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} = 50$, $2x_0^{\ 2} = 50$, $x_0 = \pm 5$.

Уравненията на допирателните са $x + y - 10 = 0$ и $x + y + 10 = 0$.

б) $(x+3)^2 + y^2 = 9$, $y = 4$;

в) $x^2 + y^2 + 10x - 2y - 46 = 0$, $x + y - 3 = 0$.

**2) Допирателна към елипса**

**12.** а) $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{36} = 1$, $M(3,3)$;

Уравнението на допирателната е $\dfrac{3x}{12} + \dfrac{3y}{36} = 1\ \Leftrightarrow\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{12} = 1$, $3x + y - 12 = 0$

б) $3x^2 + y^2 = 57$, $M(4,3)$;

Намираме каноничното уравнение на елипсата: $\dfrac{3x^2}{57} + \dfrac{y^2}{57} = 1\ \Leftrightarrow\ \dfrac{x^2}{19} + \dfrac{y^2}{57} = 1$

Уравнението на допирателната е $\dfrac{4x}{19} + \dfrac{3y}{57} = 1\ \Leftrightarrow\ \dfrac{4x}{19} + \dfrac{y}{19} = 1$, $4x + y - 19 = 0$.

в) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{60}=1$, $M(\sqrt{2},-6)$;

г) $9x^2+4y^2=36$, $M(2,0)$.

**14.** Нека $M(m,n)$ е една от допирните точки и $t$ е допирателната в тази точка.

а) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{64}=1$, $A(4,4)$;

$\Rightarrow\ t:\ \dfrac{mx}{16}+\dfrac{ny}{64}=1$ .

От условията, че $M$ лежи на елипсата и $A$ лежи на допирателната, получаваме система за $m$, $n$:

$\Rightarrow \left|\begin{array}{l}\dfrac{m^2}{16}+\dfrac{n^2}{64}=1\\ \dfrac{m4}{16}+\dfrac{n4}{64}=1\end{array}\right.$ , чиито решения са $(4,\,0)$ и $\left(\dfrac{12}{5},\dfrac{32}{5}\right)$.

Уравнението на допирателната в точката $(4,\,0)$ е $x=4$ .

Уравнението на допирателната в точката $\left(\dfrac{12}{5},\dfrac{32}{5}\right)$ е $\dfrac{12x}{5.16}+\dfrac{32y}{5.64}=1 \ \Leftrightarrow\ 3x+2y-20=0$.

б) $\dfrac{x^2}{48}+\dfrac{y^2}{64}=1$, $A(4,8)$;

$\Rightarrow\ t:\ \dfrac{mx}{48}+\dfrac{ny}{64}=1$ .

От условията, че $M$ лежи на елипсата и $A$ лежи на допирателната, получаваме система за $m$, $n$:

$\Rightarrow \left|\begin{array}{l}\dfrac{m^2}{48}+\dfrac{n^2}{64}=1\\ \dfrac{m4}{48}+\dfrac{n8}{64}=1\end{array}\right.$ , чиито решения са $(6,\,4)$ и $(0,\,8)$ .

Уравнението на допирателната в точката $(6,\,4)$ е $\dfrac{6x}{48}+\dfrac{4y}{64}=1 \ \Leftrightarrow\ 2x+y-16=0$ .

Уравнението на допирателната в точката $(0,\,8)$ е $\dfrac{0x}{48}+\dfrac{8y}{64}=1 \Leftrightarrow\ y=8$ .

в) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{100}=1$, $A(1,14)$;

г) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$, $A(0,2)$.

**15.** а) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{6}=1$, $(-2,2)$, $(2,2)$;

Координатите на пресечната точка на двете допирателни са решение на системата, образувана от уравненията на двете допирателни.

$$\begin{cases}\dfrac{-2x}{12}+\dfrac{2y}{6}=1\\ \dfrac{2x}{12}+\dfrac{2y}{6}=1\end{cases}.$$

Пресечната точка е $(0,\ 3)$.

б) $2x^2+y^2=36$, $(0,6)$, $(4,2)$;

в) $\dfrac{x^2}{45}+\dfrac{y^2}{9}=1$, $(5,2)$, $(\dfrac{20}{3},-\dfrac{1}{3})$;

г) $\dfrac{x^2}{70}+\dfrac{y^2}{14}=1$, $(-5,-3)$, $(-5,3)$.

**17.** а) $x-3y+6=0$, $T(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2})$

Нека каноничното уравнение на елипсата е $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Допирателната в точката $T(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2})$ е с уравнение $\dfrac{-\frac{3}{2}x}{a^2}+\dfrac{\frac{3}{2}y}{b^2}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{-3x}{2a^2}+\dfrac{3y}{2b^2}-1=0$

По условие уравнението на допирателната е $x-3y+6=0$.

Двете прави съвпадат $\Rightarrow$ $\dfrac{\frac{-3}{2a^2}}{1}=\dfrac{\frac{3}{2b^2}}{-3}=\dfrac{-1}{6} \quad \Rightarrow \quad a^2=9$, $b^2=3$ .

Елипсата е $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

б) $x+4y+10=0$, $T(-2,-2)$;

Нека каноничното уравнение на елипсата е $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Допирателната в точката $T(-2,-2)$ е с уравнение $\frac{-2x}{a^2}+\frac{-2y}{b^2}-1=0$.

По условие уравнението на допирателната е $x+4y+10=0$.

Двете прави съвпадат $\Rightarrow$ $\frac{\frac{-2}{a^2}}{1}=\frac{\frac{-2}{b^2}}{4}=\frac{-1}{10}$ $\Rightarrow$ $a^2=20$, $b^2=5$ .

Каноничното уравнение не елипсата е $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$.

в) $x+y+2=0$, $T(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$;

г) $x+2y-9=0$, $T(5,2)$.

**19.** а) $x+y-7=0$, $x-13y+35=0$;

Да преговорим теоремата от урока:

**Теорема.** Правата $Ax+By+C=0$ е допирателна към елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ точно когато

$$a^2A^2+b^2B^2-C^2=0. \quad (1)$$

Записваме условието (1) за дадените прави и получаваме системата:

$$\left| \begin{array}{l} a^2.1+b^2.1-7^2=0 \\ a^2.1+b^2.169-35^2=0 \end{array} \right.,$$

чието решение е $a^2=42$, $b^2=7$ .

Каноничното уравнение не елипсата е $\frac{x^2}{42}+\frac{y^2}{7}=1$.

б) $x+3y-15=0$, $7x-9y-75=0$.

**20.** а) $x+6y-24=0$, $x-2y-4=0$, $\frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{12}=1$, $\frac{x^2}{12}+y^2=1$.

Проверяваме условието от теоремата за всяка от правите и всяка от елипсите.

За правата $x+6y-24=0$ и първата елипса имаме

$144.1+12.36-24^2=144+3.144-24^2=24^2-24^2=0$.

За втората елипса имаме $12.1+1.36-24^2\neq 0$.

$\Rightarrow$ правата $x+6y-24=0$ е допирателна само към първата елипса и координатите на допирната точка са решение на системата:

$$\left|\begin{array}{l} x+6y-24=0 \\ \frac{x^2}{144}+\frac{y^2}{12}=1 \end{array}\right. .$$

Решението на системата е $(6,\ 3)$.

За правата $x-2y-4=0$ и двете елипси проверката на условието от теоремата е:

$144.1+12.4-16\neq 0$

$12.1+1.4-16=0$ $\Rightarrow$ правата е допирателна само към втората елипса.

Намираме допирната точка:

$$\left|\begin{array}{l} x-2y-4=0 \\ \frac{x^2}{12}+y^2=1 \end{array}\right. .$$

Решението на системата е $\left(3,-\frac{1}{2}\right)$.

б) $x+6y-12=0$, $x+2y-12=0$, $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{3}=1$, $\frac{x^2}{108}+\frac{y^2}{9}=1$.

**3) Допирателна към хипербола**

**21.** а) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{12}=1$, $M(12,6)$

Уравнението на допирателната в точката $M(12,6)$ е $\frac{12x}{36}-\frac{6y}{12}=1 \Leftrightarrow 2x-3y-6=0$.

б) $x^2-3y^2=54$, $M(9,3)$

Каноничното уравнение на хиперболата е $\frac{x^2}{54}-\frac{y^2}{18}=1$.

Уравнението на допирателната в точката $M(9,3)$ е $\frac{9x}{54}-\frac{3y}{18}=1 \Leftrightarrow x-y-6=0$.

в) $\frac{x^2}{20}-\frac{y^2}{5}=1$, $M(6,2)$;

г) $x^2-4y^2=28$, $M(8,3)$.

**22.** Нека $M(m,n)$ е една от допирните точки и $t$ е допирателната в тази точка.

а) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$, $(2,-5)$.

Допирателната в точка $M(m,n)$ е $\frac{m\,x}{32}-\frac{n\,y}{8}=1$

От условията, че $M$ лежи на елипсата и $(2,–5)$ лежи на допирателната, получаваме система за $m, n$:

$$\begin{cases} \frac{m^2}{32}-\frac{n^2}{8}=1 \\ \frac{m2}{32}-\frac{n(-5)}{8}=1 \end{cases},$$

чиито решения са $(6,1)$ и $\left(-\frac{22}{3},\frac{7}{3}\right)$.

Допирателната в точката $(6,1)$ е $3x-2y-16=0$.

Допирателната в точката $\left(-\frac{22}{3},\frac{7}{3}\right)$ е $11x+14y+48=0$.

б) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$, $(6,6)$;

в) $\frac{x^2}{48}-\frac{y^2}{12}=1$, $(–4,-10)$.

**23.** а) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{2}=1$, $(-3,-1)$, $(9,-5)$

Координатите на пресечната точка на двете допирателни са решение на системата, образувана от уравненията на двете допирателни.

$$\left|\begin{array}{l}\frac{-3x}{6}-\frac{-1y}{2}=1\\ \frac{9x}{6}-\frac{-5y}{2}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow (-1,1).$$

б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$, $(-21,-12)$, $(-6,-3)$

Координатите на пресечната точка на двете допирателни са решение на системата, образувана от уравненията на двете допирателни.

$$\left|\begin{array}{l}\frac{-21x}{9}-\frac{-12y}{3}=1\\ \frac{-6x}{9}-\frac{-3y}{3}=1\end{array}\right. \Leftrightarrow (-9,-5).$$

в) $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{8}=1$, $(-18,-10)$, $(6,-2)$;

г) $\frac{x^2}{54}-\frac{x^2}{18}=1$, $(9,3)$, $(27,15)$.

**25.** Да се намери каноничното уравнение на хипербола с оси върху координатните оси, ако дадената права е допирателна към хиперболата в дадената точка.

а) $9x-16y-34=0$, $(18,8)$

Нека каноничното уравнение на хиперболата е $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Уравнението на допирателната в точката $(18,8)$ е $\frac{18x}{a^2}-\frac{8y}{b^2}-1=0$.

По условие това уравнение е $9x-16y-34=0$.

Правите съвпадат $\Rightarrow$ $\frac{\frac{18}{a^2}}{9}=\frac{\frac{-8}{b^2}}{-16}=\frac{-1}{-34}$ $\Rightarrow$ $a^2=68$, $b^2=17$.

Каноничното уравнение на хиперболата е $\frac{x^2}{68}-\frac{y^2}{17}=1$.

б) $5x-9y-19=0$, $(20,9)$;

в) $x-2y-3=0$, $(15,6)$.

**26.** а) $4x+y-21=0$, $2x-3y-7=0$

Да преговорим теоремата от урока:

**Теорема.** Правата $Ax+By+C=0$ е допирателна към хиперболата $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ точно когато

$$a^2A^2-b^2B^2-C^2=0. \quad (1)с$$

Записваме условието (1) за дадените прави и получаваме системата:

$$\left| \begin{array}{l} a^2.16-b^2.1-21^2=0 \\ a^2.4-b^2.9-7^2=0 \end{array} \right. \Leftrightarrow a^2=28,\ b^2=7$$

Каноничното уравнение на хиперболата е $\frac{x^2}{28}-\frac{y^2}{7}=1$.

б) $x-y+2=0$, $3x-5y+2=0$.

**27.** а) $2x-3y-11=0$, $2x+3y+10=0$, $\frac{x^2}{70}-\frac{y^2}{20}=1$, $\frac{x^2}{55}-\frac{y^2}{11}=1$;

Проверяваме условието от теоремата за всяка от правите и всяка от хиперболите.

За правата $2x-3y-11=0$ и първата хипербола имаме

$70.4-20.9-121=280-180-121\neq 0$

За втората хипербола имаме $55.4-11.9-121=11(20-9)-121=0$.

$\Rightarrow$ правата $2x-3y-11=0$ е допирателна само към втората хипербола и координатите на допирната точка са решение на системата:

$$\left| \begin{array}{l} 2x-3y-11=0 \\ \frac{x^2}{55}-\frac{y^2}{11}=1 \end{array} \right.$$

Решението на системата е $(10, 3)$.

За правата $2x+3y+10=0$ и двете елипси проверката на условието от теоремата е:

$70.4-20.9-100=280-180-100=0$.

$55.4-11.9-100=220-99-100\neq 0$ $\Rightarrow$ правата е допирателна само към първата хипербола.

Намираме допирната точка:

$$\begin{cases} 2x+3y+10=0 \\ \dfrac{x^2}{70}-\dfrac{y^2}{20}=1 \end{cases}.$$

Решението на системата е $(-14,\, 6)$.

б) $x+2y+6=0$, $x+y+6=0$, $\dfrac{x^2}{60}-\dfrac{y^2}{24}=1$, $\dfrac{x^2}{84}-\dfrac{y^2}{12}=1$.

**4) Допирателна към парабола**

**29.** а) $y=x^2+2x+2$, $(0,2)$

$f'(x)=2x+2$

$f'(0)=2$ и $f(0)=2$

Уравнението на допирателната е $y=f'(0)(x-0)+f(0)$ $\Leftrightarrow$ $y=2x+2$ $\Leftrightarrow$ $2x-y+2=0$.

б) $y=x^2-4x-3$, $(-1,2)$

$f'(x)=2x-4$

$f'(-1)=-6$

$f(-1)=2$

Уравнението на допирателната е $y=f'(-1)(x-(-1))+f(-1)$ $\Leftrightarrow$ $y=-6(x+1)+2$ $\Leftrightarrow$ $6x+y+4=0$.

в) $y=2x^2-10x-2$, $(5,-2)$;

г) $y=2x^2+4x-2$, $(-2,-2)$.

**31.** а) $y=\dfrac{x^2}{2}+5$, $(3,9)$

Правата $t$: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ е допирателна в точка $(x_0,y_0)$ от параболата.

Имаме:

$f'(x)=x$

$f'(x_0)=x_0$

$f(x_0)=\dfrac{x_0^{\ 2}}{2}+5$.

Уравнението на допирателната е: $y=x_0(x-x_0)+\dfrac{x_0^{\ 2}}{2}+5$.

Точката $(3,9)$ лежи на допирателната $\Rightarrow$ $9=x_0(3-x_0)+\dfrac{x_0^{\ 2}}{2}+5$ $\Leftrightarrow$ $x_0^{\ 2}-6x_0+8=0$.

Корените на последното уравнение са $2$ и $4$.

Допирните точки и допирателните са $(2,\ 7)$, $2x-y+3=0$

и $(4,\ 13)$, $4x-y-3=0$.

б) $y=\dfrac{x^2}{6}+x-1$, $(-3,-4)$

в) $y=x^2+x+1$, $(0,0)$;

г) $y=-5x^2-2x+1$, $(0,6)$.

**32.** а) $y=x^2-2x+1$, $(2,1)$, $(4,9)$

Пресмятаме:

$f'(x)=2x-2$

$f'(2)=2$ и $f(2)=1$.

$f'(4)=6$ и $f(4)=9$.

Допирателната в точката $(2,1)$ е $y=f'(2)(x-2)+f(2)$ $\Leftrightarrow$ $y=2(x-2)+1$ $\Leftrightarrow$ $2x-y-3=0$

Допирателната в точката $(4,9)$ е $y=f'(4)(x-4)+f(4)$ $\Leftrightarrow$ $y=6(x-4)+9$ $\Leftrightarrow$ $6x-y-15=0$.

Координатите на пресечната точка на двете допирателни са решение на системата

$$\begin{cases} 2x - y - 3 = 0 \\ 6x - y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (3, 3).$$

б) $y = -x^2 + 7x - 5$, $(3,7)$, $(1,1)$;

в) $y = x^2 + 4x - 5$, $(-7,16)$, $(-5,0)$;

г) $y = x^2 + 8x + 8$, $(-6,-4)$, $(-2,-4)$.

**34.** а) $6x + y + 30 = 0$, $2x + y + 14 = 0$

Нека правите се допират до параболата съответно в точки $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$.

Записваме декартовите уравнения на правите:

$y = -6x - 30$

$y = -2x - 14$

$f(x) = y = x^2 + bx + c \;\Rightarrow\; f'(x) = 2x + b$.

Тогава ъгловите коефициенти на правите са $f'(x_1) = -6$ и $f'(x_2) = -2$, откъдето получаваме уравненията:

$2x_1 + b = -6$ и

$2x_2 + b = -2$.

Неизвестните коефициенти $b$ и $c$ и координатите на допирните точки намираме от системата:

$$\begin{cases} y_1 = -6x_1 - 30 \\ y_2 = -2x_2 - 14 \\ 2x_1 + b = -6 \\ 2x_2 + b = -2 \\ y_1 = x_1^2 + bx_1 + c \\ y_2 = x_2^2 + bx_2 + c \end{cases}$$

Решението на системата е $b = 4$, $c = -5$, $x_1 = -5$, $y_1 = 0$, $x_2 = -3$, $y_2 = -8$. Търсената парабола е $y = x^2 + 4x - 5$.

б) $y=-8$, $4x-y+4=0$;

в) $2x+y-2=0$, $6x-y-6=0$.

**35.** Намерете допирната точка на дадената права към дадената парабола.

а) $x-y+2=0$, $y=-x^2+5x-2$;

Решаваме системата:

$\left|\begin{array}{l} x-y+2=0 \\ y=-x^2+5x-2 \end{array}\right.$, чието решение е $(2, 4)$.

Допирната точка е $(2, 4)$.

б) $4x-y-2=0$, $y=x^2-2x+7$;

в) $x-y-10=0$, $y=x^2+5x-6$;

г) $2x-y+1=0$, $y=x^2-2x+3$.