1.5. Най-голяма и най-малка стойност на функция

2. а) $f(x)=2x^3-15x^2+36x+1$.

$f'(x)=6x^2-30x+36=6(x-2)(x-3)=0$, $x_1=2$, $x_2=3$.

Около точката $x_1=2$ производната си сменя знака от + на − $\Rightarrow$ $f_{\max}=f(2)=29$.

Около точката $x_2=3$ производната си сменя знака от − на + $\Rightarrow$ $f_{\min}=f(3)=28$.

б) $f(x)=3x^4-36x^3+156x^2-288x+1$.

$f'(x)=12x^3-3.36x^2+2.156x-288=12(x^3-9x^2+26x-24)$ =

$=12(x-2)(x-3)(x-4)$ (Използвали сме схемата на Хорнер).

Около точката $x=2$ производната си сменя знака от − на + $\Rightarrow$ $f_{\min}=f(2)=-191$.

Около точката $x=3$ производната си сменя знака от + на − $\Rightarrow$ $f_{\max}=f(3)=-188$.

Около точката $x=4$ производната си сменя знака от − на + $\Rightarrow$ $f_{\min}=f(4)=-191$.

в) $f(x)=3x^5-15x^3-60x+1$.

$f'(x)=15x^4-45x^2-60=15(x^4-3x^2-4)=15(x-2)(x+2)(x^2+1)$.

Около точката $x=-2$ производната си сменя знака от + на − $\Rightarrow$ $f_{\max}=f(-2)=145$.

Около точката $x=2$ производната си сменя знака от − на + $\Rightarrow$ $f_{\min}=f(2)=-143$.

4. а) $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x+1}$ дефинирана и диференцируема при $x\neq-1$.

$$f'(x)=\frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}.$$

Около точката $x=-3$ производната си сменя знака от + на − $\Rightarrow$ $f_{\max}=f(-3)=-9$.

Около точката $x=1$ производната си сменя знака от − на + $\Rightarrow$ $f_{\min}=f(1)=-1$.

б) $f(x)=\sqrt{x^2-2}$, дефинирана и непрекъсната при $x\in(-\infty,-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2},+\infty)$ и диференцируема при $x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-2}}$. Точката $x=0$ не принадлежи на дефиниционната област на функцията $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ производната не се анулира в дефиниционното множество на функцията $\Rightarrow$ функцията няма локални екстремуми.

в) $f(x)=\sin 3x-\frac{3\sqrt{3}}{2}x$, $x\in[0,\frac{\pi}{3}]$.

Функцията е дефинирана и диференцируема при $x\in[0,\frac{\pi}{3}]$.

$f'(x)=3\cos 3x-\frac{3\sqrt{3}}{2}=0$, $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$x\in[0,\frac{\pi}{3}]\ \Rightarrow\ 3x\in[0,\pi]$ и тъй като $\cos 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $3x=30°=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{18}$.

Следователно $f'(x)=0$ в $[0,\frac{\pi}{3}]$ при $x=\frac{\pi}{18}$.

Намираме втората производна $f''(x)=-9\sin 3x$ и пресмятаме

$f''(\frac{\pi}{18})=-9\sin(3.\frac{\pi}{18})=-\frac{9}{2}<0$.

$\Rightarrow$ $f(x)$ има локален максимум и $f_{\max}=f(\frac{\pi}{18})=\sin\frac{3\pi}{18}-\frac{3\sqrt{3}}{2}.\frac{\pi}{18}=\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$.

5. а) $f(x)=\frac{x^2-2x-2}{x^2+2x+2}$, дефинирана и диференцируема за всяко x.

$f'(x)=\frac{4x\left(x+2\right)}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$.

Около точката $x=-2$ производната си сменя знака от + на – $\Rightarrow$ $f_{\max}=f(-2)=3$.

Около точката $x=0$ производната си сменя знака от – на + $\Rightarrow$ $f_{\min}=f(0)=-1$.

$f(x)$ расте в $\left(-\infty,-2\right)$, намалява в $\left(-2,0\right)$ и расте в $\left(0,+\infty\right)$.

б) $f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x^2-3x+2}$, дефинирана и диференцируема при $x\neq 1$ и $x\neq 2$.

$f'(x)=\frac{3-2x}{\left(x^2-3+2\right)^2}$.

Тъй като $1<\frac{3}{2}<2$, то $f(x)$ расте в $\left(-\infty,1\right)$, расте в $\left(1,\frac{3}{2}\right)$, намалява в $\left(\frac{3}{2},2\right)$ и намалява в $\left(2,+\infty\right)$.

Около точката $x=\frac{3}{2}$ производната си сменя знака от + на – $\Rightarrow$ $f_{\max}=f(\frac{3}{2})=-3$..

в) $f(x)=\frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}$, дефинирана и диференцируема при $x\neq -1$ и $x\neq 3$.

$f'(x)=-\frac{\left(x+1\right)^2}{\left(x^2-2x-3\right)^2}\ \Rightarrow\ f'(x)<0,\ \forall x$.

$\Rightarrow f(x)$ няма локални екстремуми.

$f(x)$ намалява в $\left(-\infty,-1\right)$, намалява в $\left(-1,3\right)$ и намалява в $\left(3,+\infty\right)$.

9. $f(x)=x^3-12x+1$, дефинирана за всяко x.

$f'(x)=3\left(x^2-4\right)=3\left(x-2\right)\left(x+2\right)$.

Производната си сменя знака около точките -2 и 2 и $f_{\max}=f(-2)=17$ и $f_{\min}=f\left(2\right)=-15$.

а) $[a,b]=[-3,3]$. В този интервал $f(x)$ има два локални екстремума.

Пресмятаме $f(-3)=10$ и $f(3)=-8$

$\Rightarrow \max\limits_{[-3,3]} f(x)=\max\{f(-3)=10,\ f(3)=-8,\ f_{\max}=f(-2)=17\}=17$

и $\min\limits_{[-3,3]} f(x)=\min\{f(-3)=10,\ f(3)=-8,\ f_{\min}=f\left(2\right)=-15\}=-15$.

б) $[a,b]=[-3,4]$. В този интервал $f(x)$ има два локални екстремума.

Пресмятаме $f(-3)=10$, $f(4)=17$

$\Rightarrow \max\limits_{[-3,4]} f(x)=\max\{f(-3)=10,\ f(4)=17,\ f_{\max}=f(-2)=17\}=17$

и $\min\limits_{[-3,4]} f(x)=\min\{f(-3)=10,\ f(4)=17,\ f_{\min}=f\left(2\right)=-15\}=-15$.

в) $[a,b]=[-3,5]$. В този интервал $f(x)$ има два локални екстремума.

Пресмятаме $f(-3)=10$, $f(5)=66$

$\Rightarrow \max\limits_{[-3,5]} f(x)=\max\{f(-3)=10,\ f(5)=66,\ f_{\max}=f(-2)=17\}=66$

и $\min\limits_{[-3,5]} f(x)=\min\{f(-3)=10,\ f(5)=66,\ f_{\min}=f\left(2\right)=-15\}=-15$.

10. $f(x)=6x^5-15x^4-70x^3+120x^2+360x-200$, дефинирана за всяко x.

$f'(x)=30\left(x+2\right)\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-3\right)$ (Използвали сме схемата на Хорнер.). $\Rightarrow$

$f_{\max}=f(-2)=-312$

$f_{\min}=f(-1)=-391$

$f_{\max}=f(2)=392$

$f_{\min}=f(3)=313$

$\Rightarrow \max\limits_{[-2,3]} f(x)=\max\{-312,\ 313,\ 392\}=392=f_{\max}=f(2)$

и $\min\limits_{[-2,3} f(x)=\min\{-312,\ 313,\ -391\}=-391=f_{\min}=f\left(-1\right)$.

14. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{5-x^2}}$, дефинирана и диференцируема за $x\in\left(-\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$.

$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{\left(5-x^2\right)^3}}$.

Уравнението $f'(x)=0$ има единствен корен $x=0$.

Производната си сменя знака около точката 0 от $-$ на $+$ $\Rightarrow$ $f(x)$ има локален минимум и $f_{\min} = f(0) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

$\Rightarrow \min\limits_{(-\sqrt{5},\sqrt{5})} f(x) = f_{\min} = f(0) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

15. а) $f(x) = \ln(3-x^2)$, дефинирана и диференцируема за $x \in \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$.

$f'(x) = -\dfrac{2x}{3-x^2} = 0$ има единствен корен $x = 0$ и производната си сменя знака от $+$ на $-$ $\Rightarrow$ $f(x)$ има локален максимум и $f_{\max} = f(0) = \ln 3$.

$\Rightarrow \max\limits_{(-\sqrt{3},\sqrt{3})} f(x) = f_{\max} = f(0) = \ln 3$

б) $f(x) = \ln(x+2-x^2)$, дефинирана и диференцируема за $x \in \left(-1, 2\right)$.

$f'(x) = \dfrac{1-2x}{x+2-x^2} = 0$ има единствен корен $x = \dfrac{1}{2}$.

Производната си сменя знака около точката $\dfrac{1}{2}$ от $+$ на $-$ $\Rightarrow$ $f(x)$ има локален максимум и $f_{\max} = f(\frac{1}{2}) = \ln\left(\dfrac{1}{2} + 2 - \dfrac{1}{4}\right) = 2\ln\dfrac{3}{2}$.

$\Rightarrow \max\limits_{(-1,2)} f(x) = f_{\max} = f(\frac{1}{2}) = 2\ln\dfrac{3}{2}$.

16. а) $f(x) = x - \ln x$, дефинирана и диференцируема за $x > 0$.

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x} = 0$ има единствен корен $x = 1$.

Производната си сменя знака около точката 1 от $-$ на $+$ $\Rightarrow$ $f(x)$ има локален минимум и $f_{\min} = f(1) = 1$.

$\Rightarrow \min\limits_{(0,+\infty)} f(x) = f_{\min} = f(1) = 1$.

б) $f(x) = x - \ln(x+1)$, дефинирана и диференцируема за $x > -1$.

$f'(x) = \dfrac{x}{x+1} = 0$ има единствен корен $x = 0$.

Производната си сменя знака около точката 0 от $-$ на $+$ $\Rightarrow$ $f(x)$ има локален минимум $f_{\min} = f(0) = 0$.

$\Rightarrow \min\limits_{(-1,+\infty)} f(x) = f_{\min} = f(0) = 0$.

в) $f(x)=2x^2-\ln x$, дефинирана и диференцируема за $x>0$.

$f'(x)=\dfrac{4x^2-1}{x}$; $4x^2-1=0$, $x_1=-\dfrac{1}{2}\notin(0,+\infty)$ и $x_2=\dfrac{1}{2}\in(0,+\infty)$ $\Rightarrow$ в интервала $(0,+\infty)$ производната има единствен корен $x=\dfrac{1}{2}$.

Производната си сменя знака около точката $\dfrac{1}{2}$ от $-$ на $+$ $\Rightarrow$ $f(x)$ има локален минимум и

$f_{\min}=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\ln 2 \quad \Rightarrow \quad \min\limits_{(0,+\infty)} f(x)=f_{\min}=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\ln 2$.

17. $f(x)=-\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{3x^4}{2}-\dfrac{11x^3}{3}+3x^2+1$

$f'(x)=-x^4+6x^3-11x^2+6x=-x(x-1)(x-2)(x-3)$.

$\Rightarrow f_{\min}=f(0)=1,\ f_{\max}=f(1)=\dfrac{49}{30},\ f_{\min}=f(2)=\dfrac{19}{15},\ f_{\max}=f(3)=\dfrac{19}{10}$;

Изчисляваме $f(-1)=\dfrac{281}{30}$ и $f(4)=-\dfrac{97}{15}$.

Подреждаме резултатите в таблица.

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{281}{30}$	1	$\frac{49}{30}$	$\frac{19}{15}$	$\frac{19}{10}$	$-\frac{97}{15}$
екстремум		min	max	min	max	

а) $[a,b]=[-1,1]$

В интервала $(-1,1)$ производната има единствен корен $x=0$ и в тази точка $f(x)$ има локален минимум.

$\Rightarrow \min\limits_{[-1,1]} f(x)=f_{\min}=f(0)=1$

и $\max\limits_{[-1,1]} f(x)=\max\{f(-1)=\dfrac{281}{30},\ f(1)=\dfrac{49}{30}\}=\dfrac{281}{30}$.

б) $[a,b]=[0,2]$

В интервала $(0,2)$ производната има единствен корен $x=1$ и в тази точка $f(x)$ има локален максимум.

$\Rightarrow \max\limits_{[0,2]} f(x)=f_{\max}=f(1)=\dfrac{49}{30}$ и $\min\limits_{[0,2]} f(x)=\min\{f(0)=1,\ f(2)=\dfrac{19}{15}\}=1$.

в) $[a,b]=[1,4]$.

В този интервал $f(x)$ има два локален екстремума.

$\Rightarrow \min\limits_{[1,4]} f(x)=\min\{f(1)=\dfrac{49}{30},\ f(2)=\dfrac{19}{15}, f(4)=-\dfrac{97}{15}\}=-\dfrac{97}{15}$

и $\max\limits_{[1,4]} f(x)=\max\{f(1)=\dfrac{49}{30},\ f(3)=\dfrac{19}{10}, f(4)=-\dfrac{97}{15}\}=\dfrac{19}{10}$.

18. $f(x)=x^4-3x^2+2x$

$f'(x)=4x^3-6x+2=0$, $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$, $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$, $x_3=1$.

Изчисляването на стойностите на локалните ексремуми в точките x_1 и x_2 ще направим по следния начин.

Изчисляване на $f(x_1)$.

Тъй като $x_1=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ е корен на уравнението $2x^3-3x+1=0$, то

$$x_1^3=\frac{3}{2}x_1-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.\frac{-1-\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\left(-5-3\sqrt{3}\right).$$

Тогава $x_1^4=x_1.x_1^3=\dfrac{1}{8}\left(-1-\sqrt{3}\right)\left(-5-3\sqrt{3}\right)=\dfrac{1}{8}\left(1+\sqrt{3}\right)\left(5+3\sqrt{3}\right)=\dfrac{14+8\sqrt{3}}{8}=\dfrac{7+4\sqrt{3}}{4}$.

$$x_1^2=\frac{x_1^3}{x_1}=\frac{-\left(5+3\sqrt{3}\right).2}{-4\left(1+\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(5+3\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}{2.2}=\frac{4+2\sqrt{3}}{4}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow f_{\min}=f(x_1)=x_1^4-3x_1^2+2x_1=\frac{7+4\sqrt{3}}{4}-\frac{3\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}+\frac{2\left(-1-\sqrt{3}\right)}{2}=\frac{-9-6\sqrt{3}}{4}.$$

Изчисляване на $f(x_2)$.

Тъй като $x_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$ е корен на уравнението $2x^3-3x+1=0$, то

$$x_2^3=\frac{3}{2}x_2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\left(-5+3\sqrt{3}\right).$$

Тогава $x_2^4=x_2.x_2^3=\dfrac{1}{8}\left(-1+\sqrt{3}\right)\left(-5+3\sqrt{3}\right)=\dfrac{14-8\sqrt{3}}{8}=\dfrac{7-4\sqrt{3}}{4}$.

$$x_2^2=\frac{x_2^3}{x_2}=\frac{\left(-5+3\sqrt{3}\right).2}{4\left(-1+\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(-5+3\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}{2.2}=\frac{4-2\sqrt{3}}{4}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

$$\Rightarrow f_{\max}=f(x_2)=x_2^4-3x_2^2+2x_2=\frac{7-4\sqrt{3}}{4}-\frac{3\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}+\frac{2\left(-1+\sqrt{3}\right)}{2}=\frac{-9+6\sqrt{3}}{4}.$$

Изчисляваме и $f(-2)=0$, $f(-1)=-4$, $f(1)=0$ и $f(2)=8$.

Подреждаме резултатите в таблица.

x	-2	$x_1=\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$	-1	$x_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$x_3=1$	2
$f(x)$	0	$\dfrac{-9-6\sqrt{3}}{4}$	-4	$\dfrac{-9+6\sqrt{3}}{2}$	0	8
екстремум		min		max	min	

а) $[a,b]=[-2,-1]$

В този интервал производната има единствен корен x_1 и $f(x)$ има локален минимум в x_1.

$\Rightarrow \min\limits_{[-2,-1]} f(x) = f_{\min} = f(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{-9-6\sqrt{3}}{4}$

и $\max\limits_{[-2,-1]} f(x) = \max\{f(-2)=0,\ f(-1)=-4\} = 0$.

б) $[a,b]=[-1,1]$

В този интервал производната има единствен корен x_2 и $f(x)$ има локален максимум в x_2.

$\Rightarrow \max\limits_{[-1,1]} f(x) = f_{\max} = f(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{-9+6\sqrt{3}}{4}$

и $\min\limits_{[-1,1]} f(x) = \min\{f(-1)=-4, f(1)=0\} = -4$.

в) $[a,b]=[-1,2]$

В този интервал $f(x)$ има два локален екстремума.

$\Rightarrow \min\limits_{[-1,2]} f(x) = \min\{f(-1)=-4,\ f(1)=0,\ f(2)=8\} = -4$

и $\max\limits_{[-1,2]} f(x) = \max\{f(-1)-4,\ f(x_1)=\dfrac{-9+6\sqrt{3}}{2},\ f(2)=8\} = 8$.

19. а) $b=3$

$f(x)=\sqrt{x^2+3x+4}$, дефинирана и диференцируема за всяко x.

$f'(x)=\dfrac{2x+3}{2\sqrt{x^2+3x+4}}$.

$f'(x)<0$ за $x\in(-\infty,-\dfrac{3}{2})$ и $f'(x)>0$ за $x\in(-\dfrac{3}{2},+\infty)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ намалява в $(-\infty,-\dfrac{3}{2})$ и расте в $(-\dfrac{3}{2},+\infty)$.

Производната си сменя знака около точката $-\dfrac{3}{2}$ от – на + $\Rightarrow$ $f_{\min}=f(-\dfrac{3}{2})=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

б) $b=4$

$f(x)=\sqrt{x^2+4x+4}$, дефинирана за всяко x и диференцируема при $x\neq -2$.

$f'(x)=\dfrac{2+x}{\sqrt{x^2+4x+4}}$.

$f'(x)<0$ за $x\in(-\infty,-2)$ и $f'(x)>0$ за $x\in(-2,+\infty)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ намалява в $(-\infty,-2)$ и расте в $(-2,+\infty)$.

$f'(x) \neq 0$ в дефиниционната си област, но от интервалите на монотонност на $f(x)$ заключаваме, че $f(x) > f(-2)$ за $x \in (-\infty, -2)$ и $f(x) > f(-2)$ за $x \in (-2, +\infty)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ има локален минимум в точката -2 (въпреки че не е диференцируема там) и $f_{\min} = f(-2) = 0$.

Коментар. Ако запишем $f(x)$ във вида $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$, то $|x+2|$ има локален минимум при $x = -2$.

в) $b = 5$

$f(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 4}$, дефинирана и непрекъсната в $(-\infty, -4] \cup [-1, +\infty)$ и диференцируема в $(-\infty, -4) \cup (-1, +\infty)$.

$f'(x) = \dfrac{2x+5}{2\sqrt{x^2 + 5x + 4}}$. Тъй като $2x + 5 = 0$, $x = -\dfrac{5}{2} \notin (-\infty, -4) \cup (-1, +\infty)$, то производната няма корени в дефиниционното множество $\Rightarrow$ $f(x)$ няма локални екстремуми.

В $(-\infty, -4)$ $f(x)$ намалява, в $(-1, +\infty)$ $f(x)$ расте.

20. а) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x + 3}}$, дефинирана и диференцируема за всяко x.

$f'(x) = \dfrac{1 - 2x}{2\sqrt{(x^2 - x + 3)^3}} = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$.

Производната има единствен корен $x = \dfrac{1}{2}$, около който си сменя знака от + на – $\Rightarrow$ $f(x)$ има локален максимум в тази точка.

$\Rightarrow \max\limits_{(-\infty, +\infty)} f(x) = f_{\max} = f(\frac{1}{2}) = \dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.

б) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x - x^2}}$, дефинирана и диференцируема при $x \in (0, 2)$.

$f'(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{(2x - x^2)^3}} = 0$, $x = 1$.

Производната има единствен корен $x = 1$, около който си сменя знака от – на + $\Rightarrow$ $f(x)$ има локален минимум в тази точка.

$\Rightarrow \min\limits_{(0,2)} f(x) = f_{\min} = f(1) = 1$.

в) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 - 6x - 5}}$, дефинирана и диференцируема при $x \in (-5, -1)$.

$f'(x) = \dfrac{x + 3}{\sqrt{-x^2 - 6x - 5}} = 0$, $x = -3$.

Производната има единствен корен $x = -3$, около който си сменя знака от – на + $\Rightarrow$ $f(x)$ има локален минимум в тази точка.

$\Rightarrow \min\limits_{(-5,-1)} f(x) = f_{\min} = f(-3) = \dfrac{1}{2}$.

г) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-4x+3}}$, дефинирана и диференцируема за всяко x.

$f'(x)=\dfrac{2(1-x)}{\sqrt{(2x^2-4x+3)^3}}=0$, $x=1$.

Производната има единствен корен $x=1$, около който си сменя знака от + на – $\Rightarrow$ има локален максимум в тази точка.

$\Rightarrow \max\limits_{(-\infty,+\infty)} f(x)=f_{\max}=f(1)=1$.

21. $f(x)=\sqrt{\sin^2 x+\cos x}$, $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$.

В $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ $\cos x\geq 0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ е дефинирана за всяко $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$.

Да означим $\varphi(x)=\sin^2 x+\cos x$.

Тъй като функцията $y=\sqrt{x}$ е растяща в цялата си дефиниционната област, то $f(x)$ и $\varphi(x)$ ще приемат както най-голямата си стойност, така и най-малката си стойност при едно и също число x. Ето защо ще изследваме функцията $\varphi(x)$.

$\varphi'(x)=2\sin x\cos x-\sin x=\sin x(2\cos x-1)=0$.

В $(0,\dfrac{\pi}{2})$ производната има единствен корен, за който $\cos x=\dfrac{1}{2}$, $x=60°=\dfrac{\pi}{3}$.

Изследването за локален екстремум ще направим с втора производна.

$\varphi''(x)=2\cos^2 x-2\sin^2 x-\cos x$.

$\Rightarrow$ $\varphi''(\dfrac{\pi}{3})=2\cos^2\dfrac{\pi}{3}-2\sin^2\dfrac{\pi}{3}-\cos\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{3}{2}<0$ $\Rightarrow$ $\varphi(x)$ има локален максимум при $x=\dfrac{\pi}{3}$ и най-голяма стойност в тази точка

$\Rightarrow$ най-голямата стойност на $f(x)$ се достига при $x=\dfrac{\pi}{3}$ и $\max\limits_{[0,\frac{\pi}{2}]} f(x)=f(\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Най-малката си стойност $\varphi(x)$ ще достига в краищата на интервала: $\varphi(0)=\varphi(\dfrac{\pi}{3})=1$ $\Rightarrow$

$\min\limits_{[0,\frac{\pi}{2}\}} f(x)=f(0)=f(\dfrac{\pi}{2})=1$.

22. а) $a=1$ $\Rightarrow$ $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2+x^2}}$, дефинирана за всяко x.

$f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{(2+x^2)^3}}=0$, $x=0$.

Производната има единствен корен $x=0$ и около тази точка си сменя знака от + на – $\Rightarrow$ $f(x)$ има локален максимум в тази точка.

$\Rightarrow \max\limits_{[-1,1]} f(x)=f_{\max}=f(0)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Най-малката си стойност $f(x)$ достига в краищата на интервала и тъй като е четна, то $\min\limits_{[-1,1]} f(x) = f(-1) = f(1) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

$f(x)$ расте в $(-1,0)$ и намалява в $(0,1)$

б) $a=-1 \Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}$, дефинирана за всяко $x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2}) \Rightarrow$ е дефинирана и за $x\in[-1,1]$.

$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{(2-x^2)^3}}=0$, $x=0$.

Производната има единствен корен $x=0$ и около тази точка си сменя знака от $-$ на $+ \Rightarrow f(x)$ има локален минимум в тази точка.

$\Rightarrow \min\limits_{[-1,1]} f(x) = f_{\min} = f(0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Най-голямата си стойност $f(x)$ достига в краищата на интервала и тъй като е четна, то $\max\limits_{[-1,1]} f(x) = f(-1) = f(1) = 1$.

$f(x)$ намалява в $(-1,0)$ и расте в $(0,1)$.