1.1. Геометричен смисъл на понятието производна

2. а) $f(x)=x^2+x+1$, $x_0=2$.

Последователно намираме: $f'(x)=2x+1$, $f'(2)=5 \Rightarrow t:\ y=5x+b$.

При $x_0=2$ имаме $f(2)=7 \Rightarrow 7=5.2+b$,

$b=-3 \Rightarrow t:\ y=5x-3$ или $t: 5x-y-3=0$.

б) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $x\neq 1$, $x_0=3$.

$f'(x)=\dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{-2}{(x-1)^2}$, $f'(3)=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow t:\ y=-\dfrac{1}{2}x+b$.

При $x_0=3$ имаме $f(3)=2 \Rightarrow 2=-\dfrac{1}{2}.3+b$,

$b=2+\dfrac{3}{2}=\dfrac{7}{2} \Rightarrow t:\ y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}$ или $x+2y-7=0$

в) $f(x)=3^{2x+1}$, $x_0=0$.

$f'(x)=3^{2x+1}.\ln 3.2$, $f'(0)=6\ln 3 \Rightarrow t:\ y=6\ln 3x+b$.

При $x_0=0$ имаме $f(0)=3 \Rightarrow 3=6\ln 3.0+b$, $b=3 \Rightarrow t:\ y=6\ln 3x+3$ или $6\ln 3x-y+3=0$.

г) $f(x)=\ln(x+1)$, $x>-1$, $x_0=3$.

$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}$, $f'(3)=\dfrac{1}{4} \Rightarrow t:\ y=\dfrac{1}{4}x+b$.

При $x_0=3$ имаме $f(3)=\ln 4 \Rightarrow \ln 4=\dfrac{1}{4}.3+b$, $b=\ln 4-\dfrac{3}{4}=2\ln 2-\dfrac{3}{4} \Rightarrow$ $t:\ y=\dfrac{1}{4}x+2\ln 2-\dfrac{3}{4}$ или $t:\ x-4y+8\ln 2-3=0$.

д) $f(x)=\sin x+\cos x$, $x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

$f'(x)=\cos x-\sin x$, $f'(\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} \Rightarrow t:\ y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}x+b$.

При $x_0=\dfrac{\pi}{6}$ имаме $f(\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

$\Rightarrow t: \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}.\dfrac{\pi}{6}+b$, $b=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}-\dfrac{\pi\left(\sqrt{3}-1\right)}{12} \Rightarrow t:\ y=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}-\dfrac{\pi\left(\sqrt{3}-1\right)}{12}$ или $t: 6\left(\sqrt{3}-1\right)x-12y+6\left(\sqrt{3}+1\right)-\pi\left(\sqrt{3}-1\right)=0$.

3. а) $f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-5x^2+8x+3$, $f'(x)=2x^2-10x+8$.

Решаваме уравнението $2x^2-10x+8=0$, $x_1=1$, $x_2=4$, Следователно при $x_1=1$ и $x_2=4$ допирателната е успоредна на абсцисната ос.

б) $f(x)=x^3-x^2+x-1$, $f'(x)=3x^2-2x+1$.

Тъй като $f'(x)=\operatorname{tg}\alpha$, то решаваме уравнението $3x^2-2x+1=2$, $x_1=-\dfrac{1}{3}$, $x_2=1$. Следователно при $x_1=-\dfrac{1}{3}$, $x_2=1$ допирателната сключва с положителната посока на оста Ox ъгъл, чийто тангенс е равен на 2.

4. $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. Функцията е дефинирана при $x\in[-1,1]$.

$f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1,1)$

а) $f'(x)=\operatorname{tg}150°$, $f'(x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. решаваме уравнението $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\sqrt{3}\,x=\sqrt{1-x^2}$, $3x^2=1-x^2$, $x=\pm\dfrac{1}{2}$.

Правим проверка и намираме, че $x=-\dfrac{1}{2}$ не е решение на уравнението и $x=\dfrac{1}{2}$ е решение.

Пресмятаме $f(\frac{1}{2})=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Следователно допирателната в точката $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ сключва с положителната посока на оста Ox ъгъл, равен на $150°$.

Уравнението на допирателната е $t:\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+b$. При $x=\dfrac{1}{2}$ имаме $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}.\dfrac{1}{2}+b$, $b=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$ $t:\ y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $\sqrt{3}\,x+3y-2\sqrt{3}=0$.

б) $f'(x)=0$, $\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}=0$, $x=0$, $f(0)=1$. Следователно допирателната в точката $(0,1)$ е хоризонтална. Уравнението ѝ е $t:\ y=1$.

в) Имаме $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x\in(-1,1)$.

Тъй като $\lim\limits_{x\to\pm1}f'(x)=\lim\limits_{x\to\pm1}\dfrac{-x}{|x|\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}}=\mp\infty$, то в точката $(1,0)$ допирателната е $x=1$ и в точката $(-1,0)$ допирателната е $x=-1$.

5. а) $f(x)=x^2-2x+2$, $x_0=\frac{1}{2}$. Намираме $f'(x)=2x-2$, $f'(\frac{1}{2})=-1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=-1$, $\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

Уравнението на допирателната е $t:\ y=-x+b$.

При $x_0=\frac{1}{2}$ имаме $f(\frac{1}{2})=\frac{5}{4} \Rightarrow \frac{5}{4}=-\frac{1}{2}+b$, $b=\frac{7}{4}$

$\Rightarrow\ t:\ y=-x+\frac{7}{4}$, $4x+4y-7=0$.

б) $f(x)=x^2+3x+5$, $x_0=\sqrt{2}$. Намираме $f'(x)=2x+3$, $f'(\sqrt{2})=2\sqrt{2}+3 \Rightarrow$ $\operatorname{tg}\alpha=2\sqrt{2}+3$.

Уравнението на допирателната е $t:\ y=\left(2\sqrt{2}+3\right)x+b$.

При $x_0=\sqrt{2}$ имаме $f(\sqrt{2})=3\sqrt{2}+7 \Rightarrow 3\sqrt{2}+7=\left(2\sqrt{2}+3\right)\sqrt{2}+b$, $b=3$

$\Rightarrow\ t:\ y=\left(2\sqrt{2}+3\right)x+3$ или $t:\left(2\sqrt{2}+3\right)x-y+3=0$.

в) $f(x)=\operatorname{tg}x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$. Намираме $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $f'(\frac{\pi}{4})=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=2$.

Уравнението на допирателната е $t:\ y=2x+b$.

При $x_0=\frac{\pi}{4}$ имаме $f(\frac{\pi}{4})=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1 \Rightarrow 1=2\frac{\pi}{4}+b$, $b=1-\frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow t:\ y=2x+1-\frac{\pi}{2}$ или $4x-2y+2-\pi=0$.

г) $f(x)=\frac{1}{x+2}$, $x_0=-3$.

Намираме $f'(x)=-\frac{1}{\left(x+2\right)^2}$, $f'(-3)=-1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=-1>$

Уравнението на допирателната е $t:\ y=-x+b$.

При $x_0=-3$ имаме $f(-3)=-1 \Rightarrow t:-1=-(-3)+b$, $b=-4$.

$\Rightarrow t:\ y=-x-4$ или $x+y+4=0$.

д) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, $x_0=0$.

Намираме $f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $f'(0)=0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=0$, $\alpha=0$.

Уравнението на допирателната е $t:\ y=0x+b$ или $y=b$.

При $x_0=0$ имаме $f(0)=1 \Rightarrow b=1$

$\Rightarrow t:\ y=1$.

е) $f(x)=e^x$, $x_0=0$.

Намираме $f'(x)=e^x$, $f'(0)=1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=1$, $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

Уравнението на допирателната е $t:\ y=1.x+b$.

При $x_0=0$ имаме $f(0)=1 \Rightarrow b=1$

$\Rightarrow t:\ y=x+1$ или $x-y+1=0$.

ж) $f(x)=\ln x$, $x_0=1$.

Намираме $f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $f'(1)=1 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=1$, $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

Уравнението на допирателната е $t:\ y=1.x+b$.

При $x_0=1$ имаме $f(1)=0 \Rightarrow b=-1$

$\Rightarrow t:\ y=x-1$ или $x-y-1=0$.

6. а) $f(x)=2x^3-9x^2+12x-8$, $f'(x)=6x^2-18x+12$.

Решаваме уравнението $6x^2-18x+12=0$, $6\left(x-1\right)\left(x-2\right)=0$, $x_1=1$, $x_2=2$.

Пресмятаме $f(1)=-3$ и $f(2)=-4$.

$\Rightarrow$ допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точките $\left(1,-3\right)$ и $\left(2,-4\right)$ е успоредна на абсцисната ос.

б) $f(x)=\dfrac{x^2}{2x+1}$, $f'(x)=\dfrac{2x^2+2x}{\left(2x+1\right)^2}$, $x\neq-\dfrac{1}{2}$.

Решаваме уравнението $\dfrac{2x^2+2x}{\left(2x+1\right)^2}=0$, $\dfrac{2x\left(x+1\right)}{\left(2x+1\right)^2}=0$, $x_1=-1$, $x_2=0$.

Пресмятаме $f(-1)=-1$ и $f(0)=0$.

$\Rightarrow$ допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точките $\left(-1,-1\right)$ и $\left(0,0\right)$ е успоредна на абсцисната ос.

в) $f(x)=x-\sqrt{x}$, $x\geq 0$, $f'(x)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x>0$.

Решаваме уравнението $1-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=0$, $2\sqrt{x}=1$, $4x=1$, $x=\dfrac{1}{4}$.

Пресмятаме $f(\dfrac{1}{4})=-\dfrac{1}{4}$.

$\Rightarrow$ допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точката $\left(\dfrac{1}{4},-\dfrac{1}{4}\right)$ е успоредна на абсцисната ос.

г) $f(x)=\cos x$, $x\in[0;2\pi]$, $f'(x)=-\sin x$.

Решаваме уравнението $\sin x=0$ за $x\in[0;2\pi]$ $\Rightarrow$ $x_1=0$, $x_2=\pi$, $x_3=2\pi$.

Пресмятаме $f(0)=1$, $f(\pi)=-1$ и $f(2\pi)=1$.

$\Rightarrow$ допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точките $(0,1)$, $(\pi,-1)$ и $(2\pi,1)$ е успоредна на абсцисната ос.

д) $3x^4+4x^3-18x^2-36x+3$, $f'(x)=12x^3+12x^2-36x-36$.

Решаваме уравнението $12x^3+12x^2-36x-36-0$,

$x^3+x^2-3x-3=0$, $x^2(x+1)-3(x+1)=0$, $(x+1)(x^2-3)=0$, $x_1=-\sqrt{3}$, $x_2=-1$ и $x_3=\sqrt{3}$.

Пресмятаме $f(-\sqrt{3})=24\left(\sqrt{3}-1\right)$, $f(-1)=20$ и $f(\sqrt{3})=-24\left(\sqrt{3}+1\right)$.

$\Rightarrow$ допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точките $\left(-\sqrt{3},24\left(\sqrt{3}-1\right)\right)$, $(-1,20)$ и $\left(\sqrt{3},-24\left(\sqrt{3}+1\right)\right)$ е успоредна на абсцисната ос.

7. а) $f(x)=x^2+3ax-4$, $x_0=-3$, $f'(x)=2x+3a$.

Решаваме уравнението $f'(-3)=-6+3a=0$, откъдето намираме $a=2$

$\Rightarrow$ при $a=2$ допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точката с абсциса $x_0=-3$ е успоредна на абсцисната ос.

б) $f(x)=(a+1)x^2-2x$, $x_0=2$, $f'(x)=2(a+1)x-2$.

Решаваме уравнението $f'(2)=4(a+1)-2=0$, откъдето намираме $a=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ при $a=-\frac{1}{2}$ допирателната към графиката на функцията $f(x)$ в точката с абсциса $x_0=2$ е успоредна на абсцисната ос.

1.2. Производни на функции от по-висок ред. Втора производна на функция

2. а) $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $f'(x)=\dfrac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$.

$$f''(x)=\left(-\frac{2}{(x-1)^2}\right)'=\frac{4}{(x-1)^3},\quad f'''(x)=\left(\frac{4}{(x-1)^3}\right)'=-\frac{12}{(x-1)^4}.$$

б) $f(x)=\dfrac{3x-4}{x+5}$, $f'(x)=\dfrac{3(x+5)-(3x-4).1}{(x+5)^2}=\dfrac{19}{(x+5)^2}$.

$$f''(x)=\left(\frac{19}{(x+5)^2}\right)'=-\frac{38}{(x+5)^3},\quad f'''(x)=\left(-\frac{38}{(x+5)^3}\right)'=\frac{114}{(x+5)^4}.$$

в) $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $f'(x)=\dfrac{a(cx+d)-(ax+b)c}{(cx+d)^2}=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.

$$f''(x)=\left(\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}\right)'=\frac{-2(ad-bc)c}{(cx+d)^3},\quad f'''(x)=\left(\frac{-2(ad-bc)c}{(cx+d)^3}\right)'=\frac{6(ad-bc)c^2}{(cx+d)^4}.$$

3. а) $\ln x^2$, $\left(\ln x^2\right)'=\dfrac{2x}{x^2}=\dfrac{2}{x}$, .

$$\left(\ln x^2\right)''=\left(\frac{2}{x}\right)'=-\frac{2}{x^2}$$

б) $e^{\frac{1}{x}}$, $\left(e^{\frac{1}{x}}\right)'=e^{\frac{1}{x}}.\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$,

$$\left(e^{\frac{1}{x}}\right)''=\left(e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)'=e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2+e^{\frac{1}{x}}\frac{2}{x^3}=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x^4}+\frac{2}{x^3}\right).$$

4. $f'(x)=\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)'=2x-\dfrac{1}{x^2}$, $f''(x)=\left(2x-\dfrac{1}{x^2}\right)'=2+\dfrac{2}{x^3}$.

$$\Rightarrow xf''(x)-f'(x)=x\left(2+\frac{2}{x^3}\right)-\left(2x-\frac{1}{x^2}\right)=2x+\frac{2}{x^2}-2x+\frac{1}{x^2}=\frac{3}{x^2}>0.$$

1.4. Признаци за растене и намаляване на функция

3. Да се намерят интервалите на монотонност на функцията.

а) $f(x)=x^3+3x^2-24x+3$, $f'(x)=3x^2+6x-24=3\left(x^2+2x-8\right)=3(x-2)(x+4)=0$.

$x_1=-4$, $x_2=2$.

$f'(x)$ приема положителни, отрицателни и положителни стойности съответно в интервалите $(-\infty,-4)$, $(-4,2)$ и $(2,+\infty)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ расте в $(-\infty,-4)$, намалява в $(-4,2)$ и расте в $(2,+\infty)$.

б) $f(x)=2x^3+3x^2+6x+5$, $f'(x)=6x^2+6x+6=6\left(x^2+x+1\right)>0,\ \forall x$ $\Rightarrow$ $f(x)$ е растяща в $(-\infty,+\infty)$.

в) $f(x)=x^3+9x^2+27x-3$, $f'(x)=3x^2+18x+27=3\left(x^2+6x+9\right)=3(x+3)^2\ge 0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ е растяща в $(-\infty,+\infty)$.

г) $f(x)=-2x^3+3x^2+36x+1$, $f'(x)=-6x^2+6x+36=-6(x+2)(x-3)=0$, $x_1=-2$, $x_2=3$.

$f'(x)$ приема отрицателни, положителни и отрицателни стойности съответно в интервалите $(-\infty,-2)$, $(-2,3)$ и $(3,+\infty)$ $\Rightarrow$ $f(x)$ намалява в $(-\infty,-2)$, расте в $(-2,3)$ и намалява в $(3,+\infty)$.

д) $f(x)=3x^4+8x^3-30x^2-72x-36$,

$f'(x)=12x^3+24x^2-60x-72=12\left(x^3+2x^2-5x-6\right)=12(x+3)(x+1)(x-2)=0$

(използвали сме схемата на Хорнер).

$\Rightarrow$ $f'(x)$ намалява в $(-\infty,-3)$, расте в $(-3,-1)$, намалява в $(-1,2)$ и расте в $(2,+\infty)$.

е) $f(x)=3x^5+5x^3-30x+1$, $f'(x)=15x^4+15x^2-30=15\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)=0$, $x_{1,2}=\pm 1$.

Тъй като $x^2+2>0,\forall x$, то $f(x)$ расте в $(-\infty,-1)$, намалява в $(-1,1)$ и расте в $(1,+\infty)$.

ж) $f(x)=x^5+2x^3+2x+3$, $f'(x)=5x^4+6x^2+2>0,\ \forall x$ $\Rightarrow$ $f(x)$ расте в $(-\infty,+\infty)$.

з) $f(x)=x^5-3x^3+4x+4$, $f'(x)=5x^4-9x^2+4=0$, $x_{1,2}=\pm 1$, $x_{3,4}=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. Интервалите, в които $f'(x)$ си сменява алтернативно знака са $(-\infty,-1)$, $\left(-1,-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$, $\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},1\right)$ и $(1,+\infty)$, като в най-левия интервал $f'(x)$ е положителна.

$\Rightarrow$ $f(x)$ расте в $(-\infty,-1)$, $\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ и $(1,+\infty)$

и $f(x)$ намалява в $\left(-1,-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$ и $\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},1\right)$.

4. а) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$, $f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$.

$x^2\geq 0$, определяме знака на числителя: $x^2-1=(x+1)(x-1)$, който е положителен, отрицателен и положителен съответно в интервалите $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ и $(1,+\infty)$.

Тъй като $f(x)$ не е дефинирана при $x=0$, разглеждаме знака на $f(x)$ във всеки от интервалите $(-1,0)$ и $(0,1)$ по отделно, а не в целия интервал $(-1,1)$.

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	–		–	0	+
$f(x)$	↗		↘		↘		↗

$\Rightarrow$ $f(x)$ расте в $(-\infty,-1)$, намалява в $(-1,0)$, намалява в $(0,1)$ и расте в $(1,+\infty)$.

б) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$, дефинирана и диференцируема за всяко x, $f'(x)=\dfrac{-x^2+1}{\left(1+x^2\right)^2}$ Определяме знака на числителя $-x^2+1=0$, $x_{1,2}=\pm 1$ $\Rightarrow$ $f(x)$ намалява в $(-\infty,-1)$, расте в $(-1,1)$ и намалява в $(1,+\infty)$.

в) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, дефинирана и диференцируема за всяко x, $f'(x)=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$. Числителят си сменя знака около точката $0\Rightarrow$ $f(x)$ намалява в $(-\infty,0)$ и расте в $(0,+\infty)$.

г) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, дефинирана и диференцируема при $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

$f'(x)=-\dfrac{4x}{\left(x^2-1\right)^2}$. Числителят си сменя знака около точката 0, но трябва да вземем предвид дефиниционната област на функцията

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$	+		+	0	–		–
$f(x)$	↗		↗		↘		↘

$\Rightarrow$ $f(x)$ расте в $(-\infty,-1)$, расте в $(-1,0)$, намалява в $(0,1)$ и намалява в $(1,+\infty)$.

5. а) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ дефинирана в $[-1,1]$ и диференцируема в $(-1,1)$,

$f'(x)=-\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Знакът на $f'(x)$ се определя от числителя.

$\Rightarrow f(x)$ расте в $\left(-1,0\right)$ и намалява в $\left(0,1\right)$.

б) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$, дефинирана при $x\in(-\infty,-3]\bigcup[1,+\infty)$ и диференцируема при $x\in\left(-\infty,-3\right)\cup\left(1,+\infty\right)$.

$f'(x)=\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x-3}}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-3}}$. Знакът на $f'(x)$ се определя от числителя: $f'(x)<0$ при $x<-1$ и $f'(x)>0$ при $x>-1$.

Като вземем предвид дефиниционната област, получаваме, че $f(x)$ намалява в $\left(-\infty,-3\right)$ и расте в $\left(1,+\infty\right)$.

в) $f(x)=\sqrt{5x-6-x^2}$, дефинирана при $x\in[2,3]$ и диференцируема при $x\in(2,3)$.

$f'(x)=\dfrac{-2x+5}{2\sqrt{5x-6-x^2}}$.

$\Rightarrow f(x)$ расте в $\left(2,\dfrac{5}{2}\right)$ и намалява в $\left(\dfrac{5}{2},3\right)$.

г) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+3}$, дефинирана при $x\in(-\infty,1]\bigcup[3,+\infty)$ и диференцируема при $x\in\left(-\infty,1\right)\cup\left(3,+\infty\right)$.

$f'(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+3}}$. Знакът на $f'(x)$ се определя от числителя, като $f'(x)<0$ при $x<2$ и $f'(x)>0$ при $x>2$.

$\Rightarrow f(x)$ намалява в $\left(-\infty,1\right)$ и расте в $\left(3,+\infty\right)$.

д) $f(x)=\sqrt{3-x^2}$, дефинирана при $x\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$ и диференцируема при $x\in(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

$f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{3-x^2}}$.

$\Rightarrow f(x)$ расте в $\left(-\sqrt{3},0\right)$ и намалява в $\left(0,\sqrt{3}\right)$.

е) $f(x)=\sqrt{x^2+3}$, дефинирана и диференцируема за всяко x.

$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ $\Rightarrow$ $f(x)$ намалява в $\left(-\infty,0\right)$ и расте в $\left(0,+\infty\right)$.

6. а) $f(x)=\ln(x^2+x)$, дефинирана и диференцируема при $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x}\ \Rightarrow\ f(x)$ намалява в $(-\infty,-1)$ и расте в $(0,+\infty)$.

б) $f(x)=e^{x^2+x}$, дефинирана и диференцируема за всяко x.

$f'(x)=e^{x^2+x}(2x+1)$. Тъй като $e^{x^2+x}>0,\ \forall x$, $2x+1>0$ при $x>-\dfrac{1}{2}$ и $2x+1<0$ при $x<-\dfrac{1}{2}$, то $f(x)$ намалява в $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ и расте в $\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

в) $f(x)=\ln(x^2+x)-x$, дефинирана и диференцируема при $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

$f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x}-1=\dfrac{-x^2+x+1}{x^2+x}$.

За числителя имаме $-x^2+x+1=0$, $x_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Тъй като $-1<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, то $f(x)$ намалява в $(-\infty,-1)$, расте в $\left(0,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ и намалява в $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$.